

Modelagem numérica do escoamento anular
gás-líquido transiente pelo Método da Divisão
da Matriz de Coeficientes

Tobias Rudolfo Gessner

Tobias Rudolfo Gessner

Modelagem numérica do escoamento anular
gás-líquido transiente pelo Método da Divisão
da Matriz de Coeficientes

Versão final de dissertação, aprovada em banca de defesa para a obtenção de título de Mestre em Engenharia Mecânica na área de concentração de Engenharia e Ciências Térmicas do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Orientador: prof. Jader Riso Barbosa Jr

Florianópolis
Março de 2010

Catálogo na fonte pela Biblioteca Universitária
da
Universidade Federal de Santa Catarina

G392m Gessner, Tobias Rudolfo

Modelagem numérica do escoamento anular gás-líquido
transiente pelo Método da Divisão da Matriz de Coeficientes
[dissertação] / Tobias Rudolfo Gessner ; orientador, Jader
Riso Barbosa Júnior. – Florianópolis, SC, 2010.

205 p.: il., grafs., tabs.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Santa
Catarina, Centro Tecnológico. Programa de Pós-Graduação em
Engenharia Mecânica.

Inclui referências

1. Engenharia mecânica. 2. Escoamento multifásico
transiente. 3. Escoamento anular. 4. Produção de gases
líquidos. 5. Carga de líquido. I. Barbosa Junior, Jader
Riso. II. Universidade Federal de Santa Catarina. Programa
de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica. III. Título.

Tobias Rudolfo Gessner

Modelagem numérica do escoamento anular gás-líquido transiente
pelo Método da Divisão da Matriz de Coeficientes

Esta dissertação foi julgada adequada para a obtenção do título de

MESTRE EM ENGENHARIA
ESPECIALIDADE ENGENHARIA MECÂNICA
Área de Concentração de Engenharia e Ciências Térmicas

sendo aprovada em sua forma final.

Prof. Jader Riso Barbosa Junior, Ph.D. - Orientador

Prof. Eduardo Alberto Fancello, D.Sc. - Coordenador do Curso

BANCA EXAMINADORA

Prof. António Fábio Carvalho da Silva, Dr.Eng. - Presidente

Prof. Cesar José Deschamps, Ph.D.

Prof. Eugênio Spanó Rosa, Ph.D.

À minha amada Vivi

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, ao maravilhoso Deus que, enviando seu filho ao mundo, mudou a minha história e fez o que ninguém poderia imaginar.

Aos professores do POLO, dos quais merece especial menção o professor Jader Riso Barbosa Junior, amigo pessoal e orientador do presente trabalho, cujo conhecimento e dedicação marcaram cada capítulo deste, e cujo exemplo de vida marcou ainda mais a minha.

Ao meu amigo Antônio e todos os demais colegas do POLO, com quem tive a oportunidade de estudar, trabalhar e conviver quase que diariamente, desde os tempos de graduação.

Ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, pelos conhecimentos transmitidos.

Aos membros da Banca Examinadora, pela gentileza de avaliar este trabalho.

À minha esposa, Viviane, por viver os meus sonhos e me deixar fazer parte dos seus.

Aos meus pais, Sérgio e Vera, que a distância não separa.

Ao meu irmão, George, e à sua esposa, Susan, pela preciosa amizade.

"A mente que se abre a uma nova idéia jamais volta ao seu tamanho original."

(Albert Einstein)

RESUMO

A produção de reservatórios de gás úmido pode ser dificultada pela alta sensibilidade a variações de pressão apresentadas por algumas misturas de hidrocarbonetos. Nestes casos, mudanças nas condições de operação do poço podem ocasionar a formação de condensado em excesso, a tal ponto que o fluxo de gás não seja suficientemente elevado para arrastá-lo até a superfície. Este acúmulo de líquido no poço, denominado carga de líquido, gera uma contrapressão que reduz ou até mesmo interrompe a sua produção.

Neste ínterim, o presente trabalho é o primeiro de uma linha de pesquisa que se propõe ao desenvolvimento de modelos de escoamento bifásico gás-líquido transientes, com forte embasamento fenomenológico, capazes de descrever a interação dos fluidos produzidos (gás e condensado) entre si e com a coluna de produção na qual estão contidos. Para tal, são resolvidas as equações de conservação das fases envolvidas (massa, quantidade de movimento e energia), através do Método da Divisão da Matriz de Coeficientes (Chakravarthy et al., 1980), o qual é específico para sistemas de Equações Diferenciais Parciais hiperbólicas. A discretização numérica é efetuada por meio do Método das Diferenças Finitas.

O modelo aqui proposto se dedica ao padrão anular em um duto vertical e contempla a existência de três campos distintos: o filme líquido, o núcleo gasoso e o líquido sob a forma de gotículas suspensas no núcleo. O transporte entre os dois campos de líquido é modelado a partir de correlações da literatura para taxas de entranhamento e deposição de gotículas. O procedimento de cálculo usado na solução do escoamento anular é verificado pela resolução de problemas em ordem crescente de complexidade, os quais requerem para sua solução a formulação de modelos monofásicos, bifásicos homogêneos e de dois fluidos (Städtke, 2006). Resultados são comparados a soluções analíticas (no caso do escoamento em um tubo de choque, por exemplo) e numéricas conhecidas. O modelo anular é verificado por meio de comparações com o programa GRAMP2, desenvolvido por Barbosa e Hewitt (2006), para a solução do escoamento anular em regime permanente.

PALAVRAS-CHAVE: Escoamento multifásico transiente, Escoamento anular, Método da Divisão da Matriz de Coeficientes, Produção de gás úmido, Carga de líquido.

ABSTRACT

The production of hydrocarbon mixtures from wet gas reservoirs can be at times extremely sensitive to variations in pressure and other flow parameters. In such cases, changes in the operating conditions of the wellbore may lead to the formation of a significant amount of condensate which is above the maximum limit that the gas flow is capable of carrying upwards by interfacial drag along the channel. This accumulation of fluid in the wellbore, the so-called liquid loading, generates a backpressure that reduces or even interrupts the production of gas from the reservoir. In this context, the present work is the first of a research line aimed at developing phenomenological models for transient two-phase gas-liquid flows in wellbores. The mass, momentum and energy conservation equations for the phases involved are solved by the Split Coefficient Matrix Method (SCMM) proposed by Chakravarthy et al. (1980) for systems of hyperbolic Partial Differential Equations systems. The numerical discretization is performed using the Finite Differences Method.

The model advanced in the present work is concerned with the annular gas-liquid flow pattern in a vertical channel and takes into account the presence of three separate fields: the liquid film, the gaseous core and the liquid entrained as droplets in the gas stream. Mass transport between the two liquid fields is modeled based on correlations available in the literature for the rates of droplet entrainment and deposition. The calculation procedure proposed here for annular flow is verified against the solution of ancillary problems in order of increasing complexity. To solve the simpler problems, one resorts to single phase, two-phase homogeneous and two fluid models (Städtke, 2006), and the results from this simpler models are compared to analytical (in the case of the flow in a shock tube, for example) and known numerical solutions. The annular flow model is verified through comparisons with the GRAMP2 program, developed by Barbosa and Hewitt (2006), for steady-state annular flows.

KEYWORDS: Transient multiphase flow, Annular flow, Split Coefficient Matrix Method, Wet-gas production, Liquid loading.

LISTA DE SÍMBOLOS

Símbolos gerais

Símbolo	Descrição	Unidade SI
a	Velocidade do som no fluido	m / s
A	Área interna do duto	m^2
cp	Calor específico a pressão constante	J / kgK
cv	Calor específico a volume constante	J / kgK
d	Diâmetro de uma partícula	m
D	Diâmetro interno do duto	m
e	Energia interna específica	J / kg
E	Energia interna e cinética por unidade de volume	J / m^3
f	Fator de atrito	-
F	Força de superfície por unidade de volume	N / m^3
g	Aceleração da gravidade	m / s^2
g_x	Aceleração da gravidade na dir. do escoamento	m / s^2
G	Fluxo de massa	$kg / m^2 s$
h	Entalpia específica	J / kg
$h_{i,j}$	Coeficiente de transf. de calor interfacial	$W / m^2 K$
k	Coeficiente de massa virtual	-
k_f	Coeficiente de deposição	m / s
L	Comprimento do duto	m
\dot{m}	Fluxo de massa interfacial	$kg / m^2 s$
M	Vazão mássica por unidade de volume	$kg / m^3 s$

n_d	Número de partículas por unidade de volume	$1/m^3$
N	Número de nós da malha computacional	-
P	Pressão	Pa
q	Vazão volumétrica	m^3 / s
Q	Fluxo de calor por unidade de volume	W / m^3
R	Razão de pressões na onda de choque	-
Re	Número de Reynolds	-
s	Entropia específica	J / kgK
t	Tempo	s
T	Temperatura	K
U	Velocidade	m / s
U_s	Velocidade superficial	m / s
V_d	Volume de uma partícula	m^3
x	Distância, direção axial	m

Matrizes e vetores

Símbolo Descrição

A	Matriz de blocos do sistema linear
\vec{B}	Vetor termo-fonte do sistema linear
\vec{C}	Vetor termo-fonte da formulação não-conservativa
\vec{D}	Vetor termo-fonte da formulação conservativa
E	Matriz da derivada temporal
F	Matriz da derivada espacial
G	Matriz de coeficientes da formulação não-conservativa
H	Matriz de coeficientes da formulação conservativa
I	Matriz identidade

\mathbf{J}	Matriz Jacobiana
\vec{T}	Autovetor
\mathbf{T}	Matriz de transformação
\vec{U}	Vetor de incógnitas da formulação não-conservativa
\vec{V}	Vetor de incógnitas da formulação conservativa
\vec{X}	Vetor de incógnitas do sistema linear
Λ	Matriz diagonal de autovalores

Símbolos gregos

<i>Símbolo</i>	<i>Descrição</i>	<i>Unidade SI</i>
α	Fração volumétrica	-
β	Coeficiente de expansão térmica	$1 / K$
χ	Coeficiente isentrópico	-
δ	Espessura do filme de líquido	m
Δ	Incremento	-
λ	Autovalor	-
μ	Viscosidade absoluta	Ns / m^2
ρ	Massa específica	kg / m^3
σ	Tensão superficial	N / m
τ	Tensão de cisalhamento	N / m^2

Índices

Símbolo *Descrição*

-1	Matriz inversa
0	Intervalo de tempo anterior
0	Condição de não-eskorregamento
c	Mistura entranhada
$crit$	Crítico
e	Líquido entranhado
f	Líquido na forma de filme
g	Gás
i	i -ésimo nó da malha computacional no espaço
in	Entrada do duto
int	Interfacial
j	j -ésimo nó da malha computacional no tempo
k	k -ésima fase do escoamento
l	Líquido total
out	Saída do duto
T	Matriz transposta
w	Parede do duto

SUMÁRIO

1 Introdução	23
1.1 Escoamentos multifásicos na produção de petróleo	23
1.2 Objetivos	27
1.3 Estrutura da dissertação	28
2 Revisão bibliográfica	29
2.1 Padrões de escoamento bifásico vertical ascendente	29
2.2 Determinação do padrão de escoamento: critérios de transição	31
2.3 Técnicas para solução de escoamentos bifásicos	32
2.3.1 Modelos empíricos	33
2.3.2 Modelos mecanicistas	33
2.4 Classes de EDPs	35
2.5 Solução numérica de sistemas de EDPs hiperbólicas	38
2.5.1 Método da Divisão da Matriz de Coeficientes	39
2.5.1.1 Fundamentação	39
2.5.1.2 Discretização do sist. de EDPs hiperbólicas	41
2.5.1.3 Condições iniciais e de contorno	46
2.5.1.4 Propriedades e solução do sistema linear	47
2.6 Artigos relacionados ao tema	49
3 Escoamento monofásico compressível	51
3.1 Sistemas de equações de conservação	51
3.1.1 Formulação não-conservativa	52
3.1.2 Formulação conservativa	55
3.2 Análise característica	57
3.2.1 Formulação não-conservativa	57
3.2.2 Formulação conservativa	59
3.3 Implementação numérica	60
3.4 Validação: tubo de choque monofásico	61
3.4.1 Descrição do problema	61
3.4.2 Hipóteses adicionais e condições de contorno	62
3.4.3 Malha computacional e procedimento de solução ...	64
3.4.4 Resultados	65
3.5 Sumário	75

4 Escoamento bifásico: modelos homogêneos 77

4.1	Sistemas de equações de conservação	78
4.1.1	Modelo de não-equilíbrio.....	78
4.1.2	Modelo de equilíbrio	82
4.2	Análise característica	84
4.2.1	Modelo de não-equilíbrio.....	84
4.2.2	Modelo de equilíbrio	86
4.3	Modelagem dos termos de transporte	88
4.3.1	Transporte da quantidade de movimento	88
4.3.2	Transporte da energia	89
4.3.2.1	Modelo de não-equilíbrio	89
4.3.2.2	Modelo de equilíbrio.....	90
4.4	Implementação numérica	92
4.5	Validação: tubo de choque bifásico	92
4.5.1	Descrição do problema	93
4.5.2	Hipóteses adicionais e condições de contorno	93
4.5.3	Malha computacional e procedimento de solução ...	94
4.5.4	Resultados.....	95
4.6	Validação: escoamento ascendente em dutos verticais..	100
4.6.1	Descrição do problema	101
4.6.2	Hipóteses adicionais e cond. iniciais e de contorno	102
4.6.3	Malha computacional e procedimento de solução .	103
4.6.4	Resultados.....	103
4.7	Sumário	107

5 Escoamento bifásico: modelo de dois fluidos 109

5.1	Sistema de equações de conservação	110
5.1.1	Modelagem das forças interfaciais não-viscosas...	111
5.1.2	Forma final do sistema de equações.....	113
5.2	Análise característica	117
5.3	Modelagem da força de arrasto interfacial	122
5.4	Implementação numérica	123
5.5	Validação: escoamento ascendente em dutos verticais..	124
5.5.1	Descrição do problema	124
5.5.2	Hipóteses adicionais e condições iniciais e de contorno.....	125
5.5.3	Malha computacional e procedimento de solução .	127

5.5.4 Resultados	128
5.6 Sumário	133
6 Escoamento bifásico de padrão anular	135
6.1 Descrição do padrão de escoamento	136
6.2 Sistema de equações de conservação.....	137
6.2.1 Modelagem das forças interfaciais não-viscosas ...	140
6.2.2 Forma final do sistema de equações	141
6.3 Análise característica.....	146
6.4 Modelagem dos termos de transporte.....	151
6.4.1 Transporte da massa	152
6.4.2 Transporte da quantidade de movimento	153
6.4.3 Transporte da energia	154
6.5 Implementação numérica	155
6.6 Validação: escoamento ascendente em dutos verticais ..	155
6.6.1 Descrição do problema	155
6.6.2 Hipóteses adicionais e condições iniciais e de contorno.....	157
6.6.3 Malha computacional e procedimento de solução .	158
6.6.4 Resultados	159
6.6.4.1 Validação das velocidades de propagação do modelo	159
6.6.4.2 Validação dos campos para a condição regime permanente	167
6.7 Sumário	180
7 Conclusões e sugestões para trabalhos futuros	181
Referências	183
Apêndices	187
A – Avaliação numérica de derivadas	187
B – Equações de conservação para escoamentos unidimensionais em regime transiente.....	191
C – Transcrição do código-fonte do solver GBAND em linguagem FORTRAN	197
D – Determinação da velocidade do som na mistura para o modelo homogêneo de não-equilíbrio em MAPLE.....	201

1 INTRODUÇÃO

Escoamento bifásico é aquele onde duas fases, separadas por uma interface, fluem simultaneamente. Caso este possua ainda uma terceira ou mais fases, a expressão multifásico é a mais apropriada para caracterizá-lo. Por sua vez, fase (do grego *fasis*) pode ser definida como sendo uma parcela homogênea do meio, cujas propriedades físicas são contínuas no tempo e no espaço. Este termo também é associado ao estado da matéria: freqüentemente, são citados na literatura escoamentos de gás carregando consigo partículas sólidas, ou então de líquido contendo bolhas de vapor, e assim por diante.

As aplicações industriais para escoamentos bifásicos ou multifásicos são diversas. O fluxo de água e vapor d'água em reatores nucleares talvez tenha sido a primeira de grande importância. Neste caso, os requisitos de segurança para a operação dos mesmos motivaram uma série de estudos, a partir das décadas de 1940 e 1950, que resultaram no desenvolvimento de modelos sofisticados de escoamento e transferência de calor bifásicos. Outro exemplo é encontrado na exploração de campos de petróleo, onde são escoados geralmente óleo, gás natural e água, desde o subsolo até as instalações de superfície. Ainda, a constante miniaturização dos equipamentos eletrônicos vem exigindo o emprego de sistemas de remoção de calor cada vez mais eficazes, como aqueles que utilizam tubos de calor.

Em todos os casos supracitados, e em muitos outros, a previsão do comportamento das fases envolvidas é fundamental para a otimização de máquinas e processos, o que lhe confere forte apelo econômico. Por isso, a busca por uma maior compreensão da fenomenologia associada a escoamentos desta natureza, aliada ao desenvolvimento de ferramentas capazes de descrevê-los de maneira cada vez mais precisa, é um grande desafio ainda nos dias de hoje.

1.1 ESCOAMENTOS MULTIFÁSICOS NA PRODUÇÃO DE PETRÓLEO

O estudo de escoamentos multifásicos encontra na indústria do petróleo um campo de aplicação muito importante. Afinal, trata-se de um mercado cujo faturamento anual chega à casa dos

trilhões de dólares, relativos a uma produção mundial diária superior a 85 milhões de barris de óleo e 8,6 bilhões de metros cúbicos de gás natural, segundo o THE WORLD FACTBOOK (dados referentes ao ano de 2008).

O petróleo é encontrado na natureza armazenado principalmente no espaço poroso de rochas, em formações geológicas propícias, de modo a se ter um reservatório (*reservoir*). Normalmente, os reservatórios de petróleo se encontram a centenas ou até milhares de metros abaixo da superfície da terra (ou do fundo do mar), exigindo, para a sua drenagem, a perfuração de poços (*wellbores*). Estes poços produtores, ilustrados na Figura 1.1, são constituídos de partes estruturais e de equipamentos, dentre os quais está a coluna de produção (*production tubing*): por esta, escoam até a superfície (ou até o leito marinho) os fluidos antes contidos do reservatório.

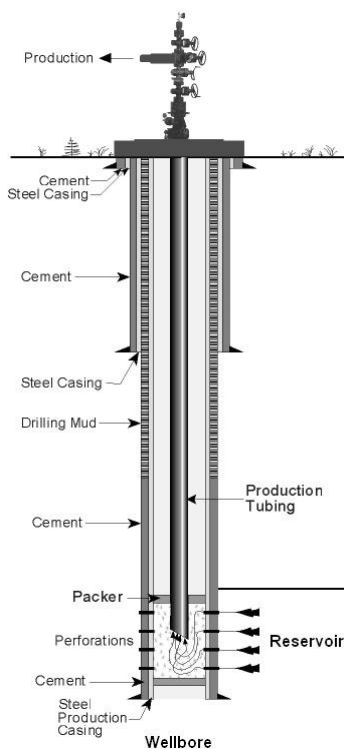


Figura 1.1 – Principais elementos de um poço produtor.
Fonte: Divisão de Óleo e Gás do Estado do Alasca, EUA

Ainda, o petróleo é composto por uma mistura de hidrocarbonetos com diferentes tamanhos de cadeia. Em condições-básicas ($293,15K$ e $101,325kPa$), as cadeias menores, também chamadas de frações leves, tendem a formar uma mistura gasosa, denominada gás natural (ou simplesmente gás); as maiores, ou frações pesadas, se encontram preferencialmente no estado líquido, em uma mistura chamada óleo cru (também referida como óleo, apenas).

No reservatório, entretanto, os patamares de temperatura e pressão são geralmente muito maiores do que os estabelecidos nas condições-básicas. Espera-se que os fluidos retirados de tal sofram uma contínua redução nestes valores, à medida que são trazidos para profundidades menores. Por isso, mesmo que o escoamento que adentra a coluna de produção possa ser monofásico, a variação das condições termodinâmicas às quais a mistura está submetida faz com que, muitas vezes, parte dele chegue à superfície no estado líquido, e parte no estado gasoso. Por outro lado, havendo a ocorrência de água no reservatório, é possível que esta seja produzida juntamente com os hidrocarbonetos. Assim, fica evidente que, ao longo da coluna de produção, o escoamento observado é essencialmente multifásico.

Em poços produtores de gás natural¹, a ocorrência de líquido tem origem em três fenômenos: (1) na precipitação de frações pesadas, tanto por resfriamento (condensação) quanto por queda de pressão (condensação retrógrada), (2) na condensação do vapor d'água produzido juntamente com o gás e (3) no arraste da água contida originalmente no reservatório, denominada água da formação. Ao chegar à superfície, a parcela originada pelo primeiro mecanismo não é chamada de óleo, mas sim, de condensado. Caso tal produção de água e condensado não seja representativa, o gás é denominado seco; do contrário, é chamado úmido.

Independentemente de quais fenômenos ocasionaram a presença de líquido na coluna de produção, é importante que este seja carregado juntamente com o escoamento da fase gasosa até o equipamento de separação. Isto ocorre com facilidade em poços de gás seco. Em alguns poços de gás úmido, entretanto, a alta

¹ Mesmo que cheguem duas fases de hidrocarbonetos até a superfície, o poço é considerado produtor de apenas uma. Isto depende de qual delas é extraída com interesses econômicos.

sensibilidade a variações de pressão apresentada pela mistura de hidrocarbonetos produzidos faz com que, durante transientes de produção, forme-se líquido em quantidade superior à que poderia ser arrastada pela fase gasosa. Tal evento desencadeia um fluxo descendente de líquido que irá, ao longo do tempo, se acumular no poço.

O fenômeno supracitado, chamado de carga de líquido (*liquid loading*), tende a se agravar com o envelhecimento do campo. Falcone (2006) estima que 90% dos poços produtores de gás nos Estados Unidos operem em condições de carga de líquido. Nestes, a contrapressão ocasionada por tal acúmulo pode levar o escoamento a um comportamento oscilatório, o que aumenta a perda de carga e gera uma redução — ou até mesmo a interrupção — da produção.

Neste íterim, fica evidente que, para haver uma maior compreensão do fenômeno em questão, é necessário dispor de ferramentas capazes de resolver, no espaço e no tempo, o escoamento ao longo da coluna de produção. A literatura é vasta em estudos desta natureza, a maioria deles resultando em correlações empíricas para cálculo de perda de carga em tubulações. Embora a funcionalidade de tais correlações tenha sido comprovada através dos anos em diversos setores da indústria, sua aplicabilidade é restrita a escoamentos em regime permanente, isto é, aqueles cujas propriedades são independentes da variável tempo.

Nos últimos anos, o aumento da velocidade de processamento dos computadores permitiu que modelos matemáticos mais complexos fossem resolvidos numericamente (na ausência de uma solução analítica exata). A técnica CFD (*Computational Fluid Dynamics*), por exemplo, consiste em empregar métodos numéricos na solução das equações de conservação que governam o problema. Estas se apresentam na forma de Equações Diferenciais Parciais, que por serem dependentes do tempo, são capazes de caracterizar também escoamentos transientes.

1.2 OBJETIVOS

A partir do exposto, propõe-se no presente trabalho o desenvolvimento de um modelo de escoamento bifásico² transiente, capaz de descrever, com embasamento fenomenológico, a interação dos fluidos entre si e com o meio que os cerca (neste caso, uma coluna de produção vertical), utilizando para tal as equações de conservação das respectivas fases, resolvidas através da técnica CFD. Estar-se-ia, desta forma, contribuindo para uma maior compreensão do fenômeno de carga de líquido em poços de gás úmido.

O modelo final será obtido através da abordagem sucessiva de escoamentos selecionados de antemão, seguindo uma ordem crescente de complexidade, a saber:

- a) Modelos de escoamento monofásico compressível transiente: serão descritos por três equações de conservação, todas relativamente simples de serem obtidas e manipuladas. Os mesmos poderão ser validados a partir da proposição de problemas com solução analítica conhecida;
- b) Modelos simplificados de escoamento bifásico transiente: requerem o emprego de quatro ou cinco equações de conservação, que podem ser expressas de maneira bastante similar às anteriores. Além de problemas analíticos, a validação poderá se basear nos resultados de alguns dos diversos trabalhos publicados sobre o assunto;
- c) Modelos avançados de escoamento bifásico transiente: serão compostos por um sistema contendo seis a oito equações de conservação, que exigem um maior esforço algébrico para obtenção e manipulação. Nestes, a validação será realizada preferencialmente através do estabelecimento de problemas que permitam a comparação direta ou com os modelos simplificados, ou com o programa GRAMP2, este último desenvolvido por Barbosa e Hewitt (2006).

² Embora apresente natureza multifásica, o escoamento em poços produtores de petróleo é geralmente descrito por modelos bifásicos, onde água e óleo são tratados como um único pseudofluido.

Proporcionando desafios gradativos, tal abordagem permitirá que a metodologia de solução numérica seja testada para diversas situações, além de possibilitar, no decorrer do trabalho, a avaliação de diferentes formulações e esquemas de interpolação. Isto provavelmente agregará ao modelo final um maior grau de embasamento e robustez.

1.3 ESTRUTURA DA DISSERTAÇÃO

A presente dissertação está dividida em quatro partes básicas. A primeira delas abrange a introdução ao tema e a revisão da bibliografia e dos conceitos fundamentais, tratadas respectivamente nos capítulos 1 e 2.

A segunda parte é dedicada aos modelos que antecedem o objetivo final do trabalho. No capítulo 3, aborda-se o escoamento monofásico compressível, explorando diferentes formulações e esquemas de interpolação. O capítulo 4 traz modelos homogêneos de escoamento bifásico, obtidos a partir das hipóteses de equilíbrio e não-equilíbrio termodinâmico. Em seguida, um modelo de dois fluidos é desenvolvido no capítulo 5.

Na terceira parte, chega-se ao âmago da dissertação, com a modelagem do escoamento bifásico de padrão anular no capítulo 6. Conforme será visto mais tarde, este padrão de fluxo é o de maior ocorrência em poços produtores de gás úmido.

Enfim, a última parte é composta pelas conclusões finais e recomendações para trabalhos futuros, feitas no capítulo 7.

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Este capítulo aborda alguns aspectos fundamentais do estudo de escoamentos bifásicos, necessários para uma compreensão adequada do restante do trabalho. Começando pela seção 2.1, será introduzido o conceito de padrão de escoamento, cujos desdobramentos matemáticos são trazidos em 2.2. Na seção 2.3, apresenta-se os principais modelos empregados atualmente na solução de problemas envolvendo duas ou mais fases em movimento. Os modelos mecanicistas são governados por Equações Diferenciais Parciais, sobre as quais será discorrido nas seções 2.4 e 2.5. Por último, na seção 2.6, cita-se artigos considerados relevantes para o escopo deste trabalho.

2.1 PADRÕES DE ESCOAMENTO BIFÁSICO VERTICAL ASCENDENTE

Existe uma série de fatores que influenciam a interação das fases entre si e com a parede da tubulação pela qual escoam: as propriedades físicas dos fluidos, a proporção entre as fases, a velocidade das mesmas e a geometria do duto, entre outros, acabam por determinar um arranjo macroscópico do escoamento. Assim, baseado em evidências experimentais para o caso de fluxo vertical ascendente, Wallis (1969) identifica os seguintes padrões:

- a) Escoamento em bolhas (*bubbly flow*): a fase gasosa está dispersa na forma de bolhas em um meio contínuo de líquido. Trata-se, portanto, de um padrão caracterizado por baixas frações volumétricas de gás (que, num escoamento espacialmente homogêneo, pode ser representada pela razão entre a área da seção transversal do duto ocupada pelo gás e a própria área transversal do duto);
- b) Escoamento intermitente (*slug flow*): o fenômeno de coalescência das bolhas faz com que estas fiquem com tamanho próximo ao diâmetro da tubulação. A fase líquida, neste caso, formará golfadas, que separam as bolhas umas das outras, e um filme na região próxima à parede do duto, que escoar no sentido descendente. As

golfadas podem ainda conter uma parcela de gás disperso;

- c) Escoamento de transição (*churn flow*): os bolsões observados no padrão anterior são quebrados, dando lugar a uma estrutura caótica e de características fortemente transientes. A separação das fases começa a ficar nítida: o gás escoar preferencialmente na região central da tubulação, enquanto a maior parcela de líquido flui próximo à parede, ora no sentido ascendente, ora no sentido descendente;
- d) Escoamento anular (*annular flow*): existe uma clara segregação entre as fases: o líquido forma um filme fino, que molha as paredes do duto e se desloca a baixas velocidades relativamente ao gás que o arrasta na direção ascendente. O gás, por sua vez, flui na região central a uma velocidade maior, formando ondas sobre a superfície do filme, de cujas cristas são arrancadas gotículas de líquido que passam a escoar entranhadas no núcleo gasoso. As gotículas, cuja fração mássica referente ao fluxo total de líquido pode alcançar valores significativos, eventualmente podem retornar ao filme em um processo denominado deposição.

Tais padrões são ilustrados na Figura 2.1.

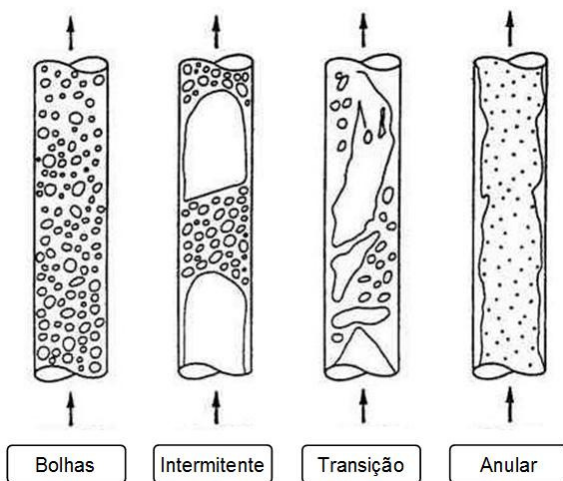


Figura 2.1 – Padrões de escoamento vertical ascendente.

Fonte: WALLIS, 1969

Cabe ressaltar que a classificação dos escoamentos bifásicos não é consenso entre os diferentes autores: podem ser encontrados na literatura descrições de arranjos de fases ligeiramente diferentes, agrupados como sub-classes de padrões de escoamento (como bolhas dispersas e *churn-turbulent* para o padrão em bolhas, por exemplo), ou então padrões nomeados de outra forma (névoa-anular ao invés de anular é outro exemplo).

2.2 DETERMINAÇÃO DO PADRÃO DE ESCOAMENTO: CRITÉRIOS DE TRANSIÇÃO

A fim de facilitar a visualização do fenômeno, os diferentes arranjos de fases são geralmente dispostos na forma de um mapa de padrões, expresso em função das velocidades superficiais (ou então dos fluxos mássicos). O mapa proposto por Taitel, Barnea e Dukler (1980), independentemente da combinação de fluidos e do estado termodinâmico dos mesmos, possui o aspecto ilustrado na Figura 2.2.

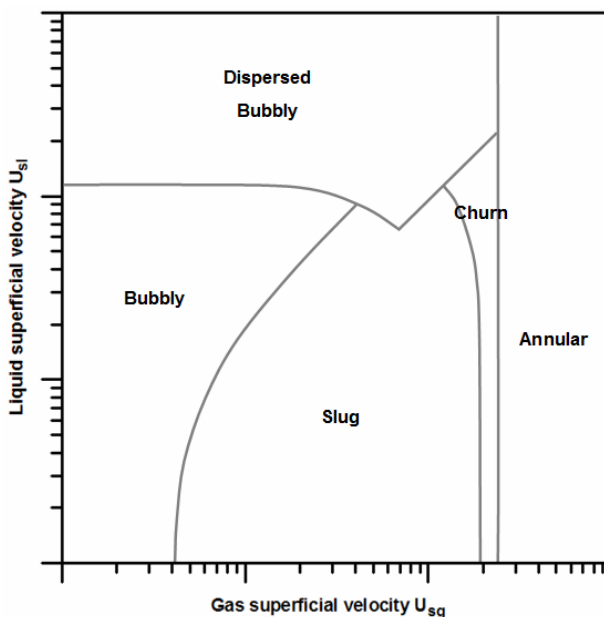


Figura 2.2 – Mapa de padrões de escoamento vertical ascendente.
Fonte: Taitel, Barnea e Dukler, 1980

A velocidade superficial de uma determinada fase k , por sua vez, é definida como

$$U_{sk} = \frac{q_k}{A} \quad (2.1)$$

Se o estabelecimento dos padrões de escoamento possui certo grau de subjetividade, a determinação das regiões de transição entre os mesmos também apresenta incertezas. Trata-se de uma área de conhecimento ainda não completamente consolidada, alvo de uma série de estudos ao longo dos últimos anos.

Taitel, Barnea e Dukler (1980) sugerem ainda que o escoamento anular está condicionado à existência de gotículas de líquido entranhadas na porção central do duto. Segundo ele, a velocidade superficial de gás U_{sg} mínima capaz de manter este líquido em suspensão é dada por

$$U_{sg} = 3,2 \left[\frac{g \sigma (\rho_l - \rho_g)}{\rho_g^2} \right]^{1/4} \quad (2.2)$$

Quanto aos demais padrões de escoamento, que não fazem parte do escopo do presente trabalho, expressões para os respectivos critérios de transição podem ser encontradas em Barbosa (2001).

2.3 TÉCNICAS PARA SOLUÇÃO DE ESCOAMENTOS BIFÁSICOS

Conforme foi mencionado no capítulo introdutório, os primeiros modelos de escoamento bifásico de aplicação industrial foram desenvolvidos nas décadas de 1940 e 1950. Em comum, todos se baseiam estritamente na análise de dados experimentais ou de campo, o que lhes confere pouco embasamento fenomenológico. São, por isso, denominados modelos empíricos.

Métodos de solução fisicamente mais consistentes surgiram apenas nas décadas de 1970 e 1980, com o advento dos métodos computacionais. Estes, por fazerem uso das equações clássicas da mecânica dos fluidos, são freqüentemente referenciados como modelos mecanicistas.

2.3.1 Modelos empíricos

A solução do escoamento por métodos empíricos se dá basicamente pela aplicação de correlações. Estas podem ser divididas em três grupos, de acordo com seu grau de elaboração (Orkiszewski, 1967):

- a) Tipo I: não consideram os padrões de fluxo existentes, tampouco a diferença de velocidade entre as fases. As frações volumétricas são obtidas diretamente das vazões de líquido e gás, e há apenas uma correlação para o cálculo do fator de fricção. São exemplos as correlações de Martinelli e Nelson (1947), Lockhart e Martinelli (1949), Poettman e Carpenter (1952) e Fancher e Brown (1963);
- b) Tipo II: também não diferenciam os padrões de escoamento, mas consideram o escorregamento entre as fases. As frações volumétricas são, portanto, um parâmetro de saída do método adotado, e o fator de fricção é novamente obtido a partir de uma única correlação. As correlações de Hagedorn e Brown (1964) e Gray (1974) são do tipo II;
- c) Tipo III: levam em consideração tanto o padrão de escoamento quanto a diferença de velocidade entre as fases. Para cada padrão, associam uma correlação específica para o cálculo das frações volumétricas e do fator de fricção. Como exemplos, pode-se citar as correlações de Beggs e Brill (1973), Duns e Ros (1963) e Orkiszewski (1967).

Destaca-se que a faixa de aplicação de uma determinada correlação é limitada aos valores máximos e mínimos atribuídos aos parâmetros do escoamento durante a coleta dos dados. Outra limitação do emprego de métodos empíricos reside no fato de que estes descrevem escoamentos em regime permanente, apenas.

2.3.2 Modelos mecanicistas

Os modelos com enfoque mecanicista empregam as equações de conservação da massa, quantidade de movimento e

energia das fases. Alguns autores as referenciam como equações de Navier-Stokes (Anderson, 1995), muito embora apenas a equação de conservação da quantidade de movimento seja originária do trabalho destes dois pesquisadores. Em comum, todas elas são expressas por meio de Equações Diferenciais Parciais (EDPs) como função do espaço e do tempo, sendo capazes de caracterizar também escoamentos transientes, portanto.

Na ausência de uma solução analítica exata, existente apenas para um pequeno número de escoamentos simplificados, as equações que governam o escoamento são resolvidas numericamente, por meio de uma técnica conhecida como Mecânica dos Fluidos Computacional, ou CFD (*Computational Fluid Dynamics*). Uma vez que a complexidade dos modelos possui impacto direto no tempo de computação, muitas vezes são realizadas simplificações nos mesmos, sempre observando a manutenção da qualidade e do sentido físico da solução. Tais hipóteses simplificativas podem estar associadas ao mecanismo de transporte das equações, à movimentação das fases ou ao acoplamento térmico das mesmas.

Quanto ao mecanismo de transporte, os modelos são ditos advectivos quando se assume que o transporte das grandezas (massa, quantidade de movimento e energia) é realizado predominantemente pelo movimento macroscópico dos fluidos, de sorte que os efeitos da agitação microscópica da matéria (responsável pela parcela difusiva) possam ser negligenciados.

Quanto à movimentação, modelos mais simplificados geralmente assumem que as fases se deslocam à mesma velocidade, ou seja, o escoamento é homogêneo. Modelos de mistura, um pouco mais sofisticados, consideram a existência de um “escorregamento” entre as fases, expresso por meio de correlações de natureza geralmente empírica. Os modelos de fluxo de deslizamento (*drift flux*) se encaixam nesta categoria. Nestes modelos, o movimento relativo entre as fases é geralmente expresso a partir de correlações para a velocidade relativa entre uma dada fase e o centro de volume da mistura. Se for estabelecido que a velocidade local de cada fase é determinada por suas respectivas equações de conservação da quantidade de movimento, o que remete a um maior realismo físico, o modelo é dito de dois fluidos.

Por fim, quanto ao acoplamento térmico das fases, uma simplificação bastante empregada é a de equilíbrio térmico local,

cujos modelos resultantes são denominados de equilíbrio. Caso se assuma que a temperatura local de cada fase é função de suas respectivas equações de conservação da energia, o mesmo é classificado como de não-equilíbrio.

No presente trabalho, dada a predominância da dinâmica dos fluidos em detrimento de efeitos microscópicos nos problemas em análise, todos os modelos desenvolvidos serão advectivos. Estes, por sua vez, podem ser subdivididos conforme mostra a Figura 2.3.

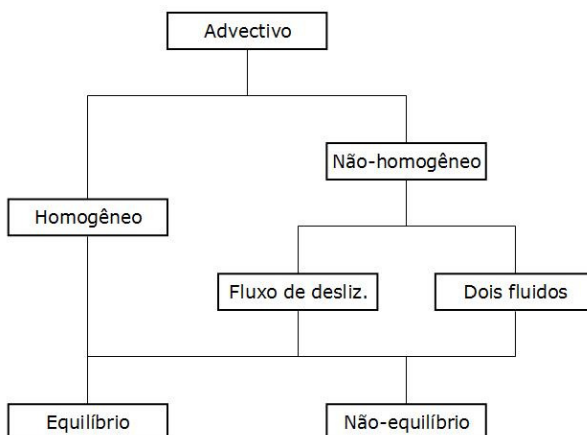


Figura 2.3 – Classificação dos modelos mecanicistas advectivos.

2.4 CLASSES DE EDPs

Já foi mencionado que as equações de conservação que governam o escoamento de uma ou mais fases em regime transiente são expressas matematicamente por meio de Equações Diferenciais Parciais (EDPs). Neste contexto, a classificação das EDPs é de fundamental importância porque, de acordo com suas classes, estão associadas às equações determinadas propriedades peculiares, que possibilitam o uso de métodos específicos para a sua solução. Este procedimento pode ser feito através da Regra de Cramer, ou então, pelo Método do Autovalor (Anderson, 1995, cap.3).

Seja uma EDP de variáveis independentes x e t . Construindo um plano xt e localizando neste um ponto P , para em seguida

introduzir uma perturbação no mesmo, tem-se que a equação será hiperbólica se a dita perturbação se propagar dentro de uma região delimitada por curvas que se interceptam em P , conforme é ilustrado na Figura 2.4.

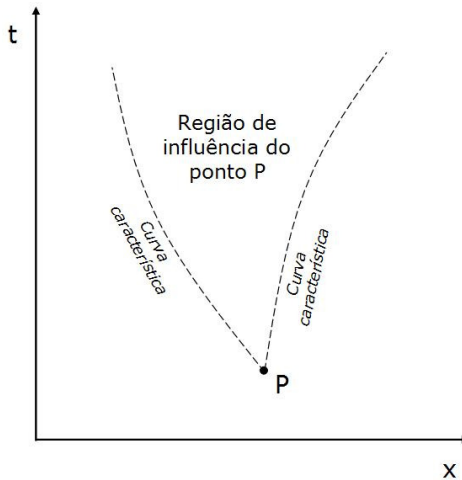


Figura 2.4 – Propagação da perturbação em P para uma EDP hiperbólica.

Problemas envolvendo escoamentos invíscidos supersônicos em regime permanente, ou então invíscidos subsônicos transientes, possuem natureza hiperbólica. Um aspecto relevante desta classe de EDPs consiste no fato de que, se uma segunda perturbação for introduzida em um ponto Q contido na região de influência de P , ela será propagada em uma região contida totalmente na anterior. Isto significa que o ponto P afeta uma determinada região, que por sua vez não possui influência sobre ele. Desta maneira, equações deste tipo podem ser resolvidas numericamente em marcha progressiva na direção t , ou seja, é possível utilizar os últimos valores calculados como dados de entrada para o próximo passo em t .

Voltando ao plano xt , tem-se que a equação será parabólica se a eventual perturbação em P for prontamente sentida nos contornos de uma das variáveis, definindo assim a região de influência ilustrada na Figura 2.5.

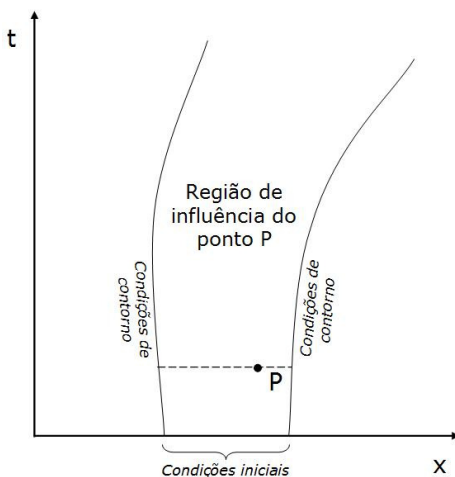


Figura 2.5 – Propagação da perturbação em P para uma EDP parabólica.

As EDPs parabólicas governam os problemas de camada limite em regime permanente e de difusão de calor em regime transiente. Assim como no caso anterior, pode-se utilizar a estratégia de marchar progressivamente na direção t .

Por fim, com base novamente no plano xt , tem-se que a equação será elíptica se, ao originar-se uma perturbação em P , a mesma for imediatamente propagada para todo o domínio de solução, de acordo com o ilustrado na Figura 2.6.

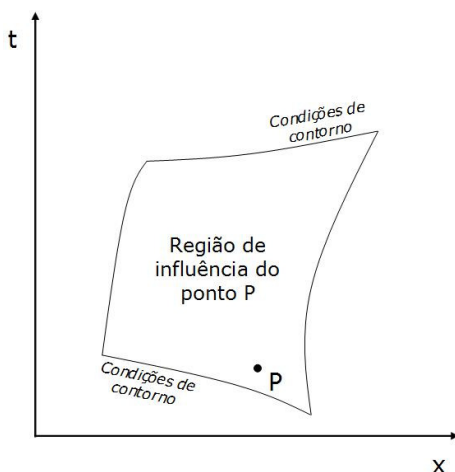


Figura 2.6 – Propagação da perturbação em P para uma EDP elíptica.

Escoamentos invíscidos subsônicos em regime permanente, ou então invíscidos incompressíveis, são todos descritos por EDPs elípticas. Desta maneira, a avaliação das variáveis no ponto P deve ser feita levando em conta todos os demais pontos do domínio, inviabilizando a solução em marcha progressiva.

É importante salientar que diversos problemas de mecânica dos fluidos possuem comportamento misto. Escoamentos viscosos em regime transiente, por exemplo, são governados por EDPs de natureza hiperbólica e ao mesmo tempo elíptica. Vale também mencionar que todos os modelos apresentados neste trabalho fazem uso de equações hiperbólicas, somente.

2.5 Solução numérica de sistemas de EDPs hiperbólicas

Nos últimos anos, foram desenvolvidas diversas técnicas baseadas no que se denomina características do sistema de EDPs, com vistas à solução de escoamentos monofásicos transientes de gás, fazendo uso da natureza hiperbólica das equações de conservação que governam tais problemas. Ainda mais recentemente, métodos deste tipo foram estendidos com sucesso para escoamentos bifásicos de diversas configurações.

Dentre as técnicas disponíveis na literatura, pode-se citar a Solução Aproximada de Riemann, a Técnica da Divisão do Vetor de Fluxo e o Método da Divisão da Matriz de Coeficientes. Segundo Städtke (2006), as duas primeiras são do mesmo tipo que os esquemas de Godunov, por utilizarem o Método dos Volumes Finitos e resolverem, para cada ponto do domínio, o Problema de Riemann partindo de uma distribuição inicial de parâmetros homogênea ou linear. O Método da Divisão da Matriz de Coeficientes, por sua vez, é formulado em Diferenças Finitas e se baseia na solução das equações de conservação na forma característica linearizada ao longo das suas respectivas linhas características.

De acordo com o mesmo autor, em comum, todas as técnicas mencionadas utilizam o conceito de upwinding, que combina a preservação dos processos de propagação de onda ao longo das direções características com a conservação da massa, quantidade de movimento e energia, na solução de problemas advectivos. Para tal, as equações de conservação devem ser

arranjadas na forma de um sistema de EDPs hiperbólicas expresso por

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \mathbf{G} \nabla \vec{U} = \vec{C} \quad (2.3)$$

ou então, para problemas unidimensionais,

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \mathbf{G} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = \vec{C} \quad (2.4)$$

A escolha da técnica de solução supostamente mais adequada para cada tipo de problema perpassa inevitavelmente a preferência pessoal dos pesquisadores. No presente trabalho, a opção pelo Método da Divisão da Matriz de Coeficientes foi feita tendo em vista apenas a sua melhor documentação dentre as fontes pesquisadas.

2.5.1 Método da Divisão da Matriz de Coeficientes

O Método da Divisão da Matriz de Coeficientes, freqüentemente citado na literatura através do acrônimo SCMM (*Split Coefficient Matrix Method*), foi proposto por Chakravarthy, Andersen e Salas (1980) na solução de problemas de aerodinâmica (escoamento monofásico de um gás). Mais tarde, Romstedt (1990) e Städtke (2006) estenderam sua aplicabilidade a escoamentos bifásicos homogêneos e não-homogêneos, respectivamente.

2.5.1.1 Fundamentação

O SCMM, como o nome já sugere, baseia-se na partição da matriz de coeficientes do sistema de EDPs em duas parcelas, cada uma delas associada a autovalores de mesmo sinal (positivo ou negativo). O processo de obtenção destas duas novas matrizes é puramente analítico, ou seja, até este ponto, não são empregadas técnicas numéricas de cálculo.

Seja um sistema de ordem n de EDPs hiperbólicas, da forma

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \mathbf{G} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = \vec{C} \quad (2.5)$$

Os autovalores da matriz de coeficientes \mathbf{G} são, por definição, as raízes do seu polinômio característico,

$$\det(\mathbf{G} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (2.6)$$

O número de raízes reais do polinômio característico é igual à ordem do sistema de EDPs. Desta maneira, a matriz de autovalores $\mathbf{\Lambda}$ será dada por

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Para cada autovalor λ_i da matriz de coeficientes \mathbf{G} , existe um autovetor associado \vec{T}_i , de forma a tornar válida a expressão

$$(\mathbf{G} - \lambda_i \mathbf{I}) \vec{T}_i = 0 \quad (2.8)$$

A matriz de transformação \mathbf{T} é formada pelos autovetores dispostos em colunas,

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots & T_{1n} \\ T_{21} & T_{22} & \dots & T_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ T_{n1} & T_{n2} & \dots & T_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Sabe-se que a matriz de coeficientes \mathbf{G} poderia ser obtida novamente, fazendo

$$\mathbf{G} = \mathbf{T} \mathbf{\Lambda} \mathbf{T}^{-1} \quad (2.10)$$

Portanto, se a matriz de autovalores $\mathbf{\Lambda}$ for decomposta em n parcelas,

$$\begin{aligned} \mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \\ = \mathbf{\Lambda}_1 + \mathbf{\Lambda}_2 + \dots + \mathbf{\Lambda}_n \end{aligned} \quad (2.11)$$

resulta, da substituição da Equação (2.11) em (2.10),

$$\mathbf{G} = \mathbf{T}\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{T}^{-1} + \mathbf{T}\mathbf{\Lambda}_2\mathbf{T}^{-1} + \dots + \mathbf{T}\mathbf{\Lambda}_n\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{G}_1 + \mathbf{G}_2 + \dots + \mathbf{G}_n \quad (2.12)$$

Pode-se, agora, compor uma matriz associada aos autovalores positivos \mathbf{G}^+ e outra associada aos negativos \mathbf{G}^- ,

$$\mathbf{G}^+ = \frac{\lambda_1 + |\lambda_1|}{2\lambda_1} \mathbf{G}_1 + \frac{\lambda_2 + |\lambda_2|}{2\lambda_2} \mathbf{G}_2 + \dots + \frac{\lambda_n + |\lambda_n|}{2\lambda_n} \mathbf{G}_n \quad (2.13)$$

$$\mathbf{G}^- = \frac{\lambda_1 - |\lambda_1|}{2\lambda_1} \mathbf{G}_1 + \frac{\lambda_2 - |\lambda_2|}{2\lambda_2} \mathbf{G}_2 + \dots + \frac{\lambda_n - |\lambda_n|}{2\lambda_n} \mathbf{G}_n \quad (2.14)$$

de modo que a Equação (2.5) seja reescrita como

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \mathbf{G}^+ \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + \mathbf{G}^- \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = \vec{C} \quad (2.15)$$

Por ser capaz de distinguir a influência de autovalores positivos e negativos sobre o sistema, o SCMM permite que, na etapa subsequente de discretização, as derivadas associadas a \mathbf{G}^+ e \mathbf{G}^- recebam tratamentos matemáticos específicos. Isto garante estabilidade ao método, além de lhe conferir alta resolução e redução dos efeitos de difusão e dispersão numéricas.

2.5.1.2 Discretização do sistema de EDPs hiperbólicas

Segundo Anderson (1995, p.125), “em essência, discretização é o processo pelo qual uma expressão matemática fechada, como uma função ou uma equação diferencial ou integral envolvendo funções, todas assumidas como tendo um contínuo de imagens associado a um determinado domínio, é aproximada por expressões análogas (porém diferentes) que prescrevem valores apenas a um número finito de pontos ou volumes discretos no domínio”.

No presente trabalho, o procedimento acima definido é necessário para que o sistema de EDPs possa ser resolvido numericamente, a partir do chamado Método das Diferenças Finitas (MDF). O domínio de solução deverá ser, portanto, aproximado por uma malha computacional composta de um número finito de pontos, denominados nós. A Figura 2.7 ilustra uma malha computacional com nós regulares em t e irregulares em x .

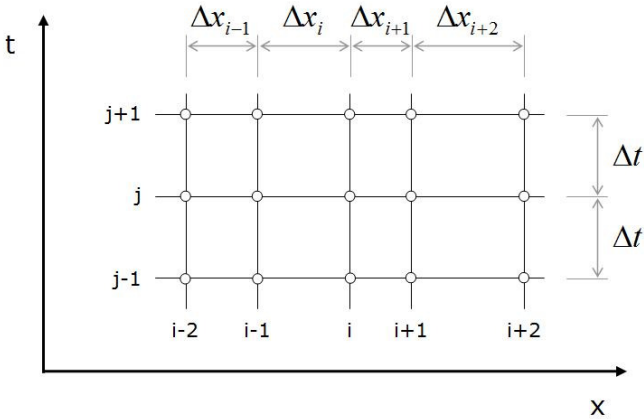


Figura 2.7 – Malha computacional.

O MDF consiste basicamente na substituição das derivadas parciais por funções algébricas, aproximando o sistema de EDPs por um sistema linear (formulação implícita) ou por um conjunto de equações lineares (formulação explícita). Isto pode ser realizado de três maneiras distintas:

- a) esquema de diferenças progressivas (*forward difference scheme – FDS*): a função substituta contém o nó onde a derivada parcial está sendo aplicada, e um ou mais nós de índice superior a este (à frente, portanto);
- b) esquema de diferenças regressivas (*backward difference scheme – BDS*): neste caso, os nós adicionais (um ou mais) possuem índice inferior ao nó de avaliação da derivada (estão atrás deste);
- c) esquema de diferenças centrais (*central difference scheme – CDS*): o nó de aplicação é cercado por outros de índice superior e inferior, em igual número (situa-se em uma posição central, portanto). Este esquema não será empregado no presente trabalho, por motivos que serão detalhados posteriormente.

Ainda, com base no número de nós adicionais empregados pelos esquemas de diferenciação, estes podem ser classificados como sendo de primeira ordem (um nó adicional), segunda ordem (dois), e assim por diante.

Desta forma, voltando ao sistema expresso na Equação (2.15), e tendo como base as deduções que se encontram no Apêndice A, a aproximação de $\partial \vec{U} / \partial x$ pelo FDS de primeira ordem resulta em

$$\left. \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right|_{i,j} \approx \frac{\vec{U}_{i+1,j} - \vec{U}_{i,j}}{\Delta x_{i+1}} \quad (2.16)$$

e pelo de segunda ordem, em

$$\left. \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right|_{i,j} \approx - \frac{(\varphi^2 - 1)\vec{U}_{i,j} - \varphi^2 \vec{U}_{i+1,j} + \vec{U}_{i+2,j}}{(\varphi^2 - \varphi)\Delta x_{i+1}} \quad (2.17)$$

onde

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (2.18)$$

$$\varphi = \frac{\Delta x_{i+1} + \Delta x_{i+2}}{\Delta x_{i+1}} \quad (2.19)$$

A mesma derivada parcial pode ainda ser discretizada por BDS de primeira ou segunda ordem, dados, respectivamente, por

$$\left. \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right|_{i,j} \approx \frac{\vec{U}_{i,j} - \vec{U}_{i-1,j}}{\Delta x_i} \quad (2.20)$$

e

$$\left. \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} \right|_{i,j} = \frac{(\beta^2 - 1)\vec{U}_{i,j} - \beta^2 \vec{U}_{i-1,j} + \vec{U}_{i-2,j}}{(\beta^2 - \beta)\Delta x_i} \quad (2.21)$$

onde

$$\beta = \frac{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}}{\Delta x_i} \quad (2.22)$$

A escolha do esquema de diferenciação mais apropriado para $\partial \vec{U} / \partial x$ é feita com base na Figura 2.8.

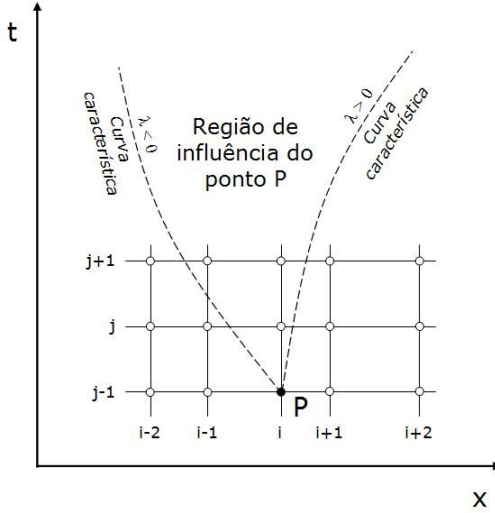


Figura 2.8 – Malha computacional e curvas características do sistema.

Conforme pode ser observado na figura, os autovalores positivos carregam informações apenas no sentido crescente de x , o que faz com que as mesmas cheguem aos nós através daqueles que os precedem (nós de índice inferior): é imperativo, portanto, que na avaliação da derivada associada à matriz \mathbf{G}^+ , adote-se o BDS. Percebe-se também que os autovalores negativos levam informações somente para o sentido oposto ao primeiro, ou seja, dos nós de maior índice para os de menor: por isso, a derivada associada à matriz \mathbf{G}^- deve ser discretizada utilizando o FDS. Constatase, ainda, que o CDS não é vantajoso em nenhum dos dois casos.

Para a aproximação de $\partial \vec{U} / \partial t$, por sua vez, costuma-se empregar o BDS de primeira ordem, de modo a se obter

$$\left. \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} \right|_{i,j} \approx \frac{\vec{U}_{i,j} - \vec{U}_{i,j-1}}{\Delta t} \quad (2.23)$$

onde, por causa da solução em marcha na direção t , o valor numérico de $\vec{U}_{i,j-1}$ é conhecido de antemão.

Assim, com base nas Equações (2.16) a (2.23), a forma geral discretizada de primeira ordem do sistema de EDPs expresso em (2.15) será dada por

$$\frac{\bar{U}_{i,j} - \bar{U}_{i,j-1}}{\Delta t} + \mathbf{G}_{i,j}^+ \frac{\bar{U}_{i,j} - \bar{U}_{i-1,j}}{\Delta x_i} + \mathbf{G}_{i,j}^- \frac{\bar{U}_{i+1,j} - \bar{U}_{i,j}}{\Delta x_{i+1}} = \bar{C}_{i,j} \quad (2.24)$$

ou, em uma notação mais compacta,

$$\frac{\bar{U}_i - \bar{U}_i^0}{\Delta t} + \mathbf{G}_i^+ \frac{\bar{U}_i - \bar{U}_{i-1}}{\Delta x_i} + \mathbf{G}_i^- \frac{\bar{U}_{i+1} - \bar{U}_i}{\Delta x_{i+1}} = \bar{C}_i \quad (2.25)$$

A discretização do mesmo sistema empregando esquemas de segunda ordem em x e primeira ordem em t (doravante tratada simplesmente como discretização de segunda ordem) resultará na forma geral

$$\begin{aligned} \frac{\bar{U}_{i,j} - \bar{U}_{i,j-1}}{\Delta t} + \mathbf{G}_{i,j}^+ \frac{(\beta^2 - 1)\bar{U}_{i,j} - \beta^2\bar{U}_{i-1,j} + \bar{U}_{i-2,j}}{(\beta^2 - \beta)\Delta x_i} + \\ - \mathbf{G}_{i,j}^- \frac{(\varphi^2 - 1)\bar{U}_{i,j} - \varphi^2\bar{U}_{i+1,j} + \bar{U}_{i+2,j}}{(\varphi^2 - \varphi)\Delta x_{i+1}} = \bar{C}_{i,j} \end{aligned} \quad (2.26)$$

ou então,

$$\begin{aligned} \frac{\bar{U}_i - \bar{U}_i^0}{\Delta t} + \mathbf{G}_i^+ \frac{(\beta^2 - 1)\bar{U}_i - \beta^2\bar{U}_{i-1} + \bar{U}_{i-2}}{(\beta^2 - \beta)\Delta x_i} + \\ - \mathbf{G}_i^- \frac{(\varphi^2 - 1)\bar{U}_i - \varphi^2\bar{U}_{i+1} + \bar{U}_{i+2}}{(\varphi^2 - \varphi)\Delta x_{i+1}} = \bar{C}_i \end{aligned} \quad (2.27)$$

O termo forma geral teve de ser empregado nas deduções anteriores porque, para alguns nós da malha computacional, existem restrições quanto aos esquemas de aproximação de $\partial\bar{U}/\partial x$ possíveis de serem empregados. São eles:

- a) nó $(1, j)$: não permite o uso de BDS, uma vez que não existem nós de índice inferior. Pode-se, entretanto, assumir que a derivada associada a \mathbf{G}^+ é nula, sem prejuízo à solução do sistema de EDPs;
- b) nó $(2, j)$: o BDS deve obrigatoriamente ser de primeira ordem, dado que há apenas um nó anterior a ele;
- c) nó $(N-1, j)$: o FDS deve ser de primeira ordem, pois existe um nó de índice superior, somente;

- d) nó (N, j) : não possibilita o uso de FDS, tendo em vista a inexistência de nós posteriores a ele. Assume-se, neste caso, que a derivada associada a \mathbf{G}^* é nula, novamente sem comprometer a solução.

Desta maneira, as formas específicas do sistema discretizado, relativas aos nós supracitados, podem ser facilmente obtidas.

2.5.1.3 Condições iniciais e de contorno

As condições iniciais e de contorno são parâmetros importantes de um sistema de EDPs: afinal, são estas que definem, para problemas governados pelas mesmas equações, qual a solução particular de cada um deles.

Entende-se como condições iniciais o conjunto de informações atribuídas ao sistema para o menor valor da variável t presente no domínio de solução, denominado t_0 . No presente trabalho, será considerado que tais condições são do tipo

$$\vec{U}(x, t_0) = \vec{f}(x) \quad (2.28)$$

o que pode ser trazido para a malha computacional como

$$\vec{U}_{i,1} = \vec{f}(x_i) \quad (2.29)$$

As condições de contorno, por sua vez, trazem informações associadas aos valores mínimo e máximo da variável x , aqui denominados respectivamente c_1 e c_2 , para cada valor de t . Novamente, neste trabalho, estas serão tratadas matematicamente como

$$\vec{U}(c_1, t) = \vec{g}(t) \quad (2.30)$$

e

$$\vec{U}(c_2, t) = \vec{h}(t) \quad (2.31)$$

o que, na malha computacional, implica em

$$\vec{U}_{1,j} = \vec{g}(t_j) \quad (2.32)$$

e

$$\bar{U}_{N,j} = \bar{h}(t_j) \quad (2.33)$$

2.5.1.4 Propriedades e solução do sistema linear

O sistema de equações lineares obtido a partir da aplicação do MDF no sistema de EDPs pode ser expresso mais convenientemente como

$$\mathbf{A}\vec{X} = \vec{B} \quad (2.34)$$

Para a Equação (2.25), a matriz de blocos \mathbf{A} possui a forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A & A & & & & & \\ & A & A & A & & & \\ & & A & A & A & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & & A & A & A \\ & & & & & & A & A & A \\ & & & & & & & A & A \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

cujos elementos não nulos são submatrizes dadas por

$$A_{ii-1} = -\frac{1}{\Delta x_i} \mathbf{G}^+ \quad (2.36)$$

$$A_{ii} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{I} + \frac{1}{\Delta x_i} \mathbf{G}^+ - \frac{1}{\Delta x_{i+1}} \mathbf{G}^- \quad (2.37)$$

$$A_{ii+1} = \frac{1}{\Delta x_{i+1}} \mathbf{G}^- \quad (2.38)$$

Já para a Equação (2.27), a matriz de blocos \mathbf{A} passa a ser da forma

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A & A & A & & & \\ A & A & A & A & & \\ A & A & A & A & A & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & A & A & A & A & A \\ & & & & A & A & A & A \\ & & & & & A & A & A \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

e seus elementos não nulos, escritos como

$$A_{ii-2} = \frac{1}{(\beta^2 - \beta)\Delta x_i} \mathbf{G}^+ \quad (2.40)$$

$$A_{ii-1} = -\frac{\beta^2}{(\beta^2 - \beta)\Delta x_i} \mathbf{G}^+ \quad (2.41)$$

$$A_{ii} = \frac{1}{\Delta t} \mathbf{I} + \frac{\beta^2 - 1}{(\beta^2 - \beta)\Delta x_i} \mathbf{G}^+ - \frac{\varphi^2 - 1}{(\varphi^2 - \varphi)\Delta x_{i+1}} \mathbf{G}^- \quad (2.42)$$

$$A_{ii+1} = \frac{\varphi^2}{(\varphi^2 - \varphi)\Delta x_{i+1}} \mathbf{G}^- \quad (2.43)$$

$$A_{ii+2} = -\frac{1}{(\varphi^2 - \varphi)\Delta x_{i+1}} \mathbf{G}^- \quad (2.44)$$

É importante salientar que, para ambos os casos, nem todos os elementos da matriz de blocos apresentarão esta forma geral. Isto se deve tanto a restrições no esquema de discretização, quanto à aplicação das condições de contorno do problema.

Por fim, ainda na Equação (2.34),

$$X_i = \vec{U}_i \quad (2.45)$$

e

$$B_i = \frac{1}{\Delta t} \vec{U}_i^0 + \vec{C}_i \quad (2.46)$$

A ordem do sistema linear descrito na Equação (2.34) O_{lin} pode ser calculada por

$$O_{lin} = O_{EDP} N_x \quad (2.47)$$

onde O_{EDP} denota a ordem do sistema de EDPs e N_x é o número de nós da malha computacional na direção x . Para o mesmo, o número de diagonais contendo elementos diferentes de zero N_{dia} é expresso por

$$N_{dia} = 2O_{EDP}(O_{int} + 1) - 1 \quad (2.48)$$

onde O_{int} representa a ordem do esquema de interpolação. Neste tocante, é possível verificar que um esquema como o TDMA (*TriDiagonal Matrix Algorithm*) poderia ser empregado apenas na solução de um sistema linear referente a $O_{EDP} = 1$ e $O_{int} = 1$ (para o qual $N_{dia} = 3$). Para todos os demais, faz-se necessário uma rotina capaz de lidar com um número maior de diagonais. O *solver* GBAND foi desenvolvido por Aziz e Settari (1979) para este tipo de situação, sendo empregado na solução desses, portanto.

2.6 ARTIGOS RELACIONADOS AO TEMA

A seguir, será feito um breve apanhado dos artigos que, juntamente com os já citados no decorrer deste capítulo, foram considerados os mais relevantes para o tema proposto.

Dutta-Roy (1984) estudou o comportamento transiente de escoamentos bifásicos horizontais. As equações de conservação da massa e da quantidade de movimento (assumiu-se fluxo isotérmico) foram resolvidas numericamente para três configurações de escoamento, dentre elas o padrão anular. Empregou-se para tal um esquema de diferenças centrais (CDS), muito embora este seja contra-indicado na solução de problemas advectivos. Adicionalmente, um modelo analítico foi empregado a fim de, partindo das propriedades observadas em um determinado ponto da tubulação, se determinar qual dos arranjos de fase é o mais provável. Por fim, se comparou os resultados do modelo com dados experimentais obtidos para uma mistura de ar e querosene, chegando-se a uma concordância apenas satisfatória.

Lu, Simpson e Gilchrist (1996) desenvolveram um modelo homogêneo de equilíbrio para escoamentos de fluidos saturados em regime transiente. O sistema composto por três equações de conservação foi resolvido pelo Método da Divisão da Matriz de

Coeficientes (SCMM), o que os autores presumiram ser inédito na literatura aberta, talvez por desconhecerem ou não terem acesso ao trabalho de Romstedt (1990). O trabalho contém uma ótima explanação acerca do histórico e dos fundamentos do SCMM, onde se enfatiza sua consistência física e facilidade de manuseio frente a outras metodologias. Embora simplificado, o modelo foi capaz de reproduzir com boa fidelidade os resultados lidos durante o fluxo descendente de água e de R113 em bancada experimental.

O SCMM foi também adotado por Ouyang e Aziz (2001) em seus estudos de escoamentos bifásicos transientes com influxo ou efluxo através da parede da tubulação. O modelo homogêneo desenvolvido era composto apenas pelas equações de conservação da massa e quantidade de movimento da mistura, uma vez que foi considerada a hipótese de escoamento isotérmico. O sistema linear resultante da aplicação do MDF com formulação implícita foi resolvido pela metodologia GBAND (Aziz e Settari, 1979). Validou-se o modelo a partir de dados experimentais, concernentes ao fluxo vertical ascendente de ar e água, novamente com boa concordância.

Städtke et al. (2005) propuseram um modelo transiente de dois fluidos e não-equilíbrio composto por um conjunto de seis equações de conservação (massa, quantidade de movimento e energia para cada uma das fases). Foi dada especial atenção ao tratamento dos termos-fonte, visando a manutenção da hiperbolicidade do sistema. Os autores ainda descreveram diversos métodos de solução numérica de EDPs desta natureza, dentre eles o SCMM, submetendo-os a um total de oito problemas-teste (separação de fases em um tubo vertical, escoamento bifásico em um bocal, oscilação de coluna de água em um tubo em “U”, e outros). Os resultados obtidos foram bastante animadores, embora não tenham sido mencionados os padrões de escoamento considerados e seus respectivos modelos de acoplamento interfacial, de modo a impossibilitar que outros pesquisadores tentassem posteriormente repetir a validação.

3 ESCOAMENTO MONOFÁSICO COMPRESSÍVEL

Neste capítulo, serão tratados os principais aspectos concernentes a escoamentos monofásicos compressíveis. Este estudo é particularmente interessante para a compreensão de escoamentos mais complexos, tratados nos capítulos subseqüentes. Em comum, todos possuem a mesma metodologia de solução: é conveniente, portanto, que esta seja abordada aqui de maneira mais detalhada.

Os assuntos estão organizados da seguinte forma: a seção 3.1 trata dos sistemas de equações de conservação obtidos a partir de variáveis conservativas e não-conservativas, cujas características são identificadas na seção 3.2, possibilitando a divisão de suas respectivas matrizes de coeficientes. A seção 3.3, por sua vez, descreve a obtenção do sistema de equações lineares. Os modelos de escoamento monofásico desenvolvidos são validados através da solução de um problema-teste, na seção 3.4. Por último, a seção 3.5 sumariza as atividades realizadas no capítulo, bem como as conclusões obtidas.

3.1 SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO

Conforme já foi mencionado anteriormente, a técnica CFD parte das equações de conservação das fases: massa, quantidade de movimento e energia. Tais equações podem ser expressas em função de diferentes conjuntos de variáveis, ao que aqui se denomina formulação. Esta, por sua vez, pode ser classificada como:

- a) conservativa: emprega variáveis que conservam seus valores na presença de descontinuidades do escoamento, tais como ondas de choque (variáveis conservativas, portanto). Esta formulação é vantajosa em fluxos fortemente transientes, muito embora a obtenção do sistema de equações, bem como a aplicação do SCMM, exija um tratamento matemático maior;
- b) não-conservativa: as variáveis utilizadas, quando na presença de descontinuidades, não conservam seus valores originais (variáveis não-conservativas). Isto faz com que tal formulação seja adequada apenas para

escoamentos com transientes menos intensos. Em contrapartida, exige um menor esforço algébrico nas atividades supracitadas.

As formulações não-conservativa e conservativa serão abordadas nas seções 3.1.1 e 3.1.2, respectivamente. Para ambos os casos, uma vez obtidas as equações de conservação, estas podem ser facilmente dispostas na forma de um sistema de EDPs, possibilitando assim o emprego da metodologia de solução descrita na seção 2.5.1.

3.1.1 Formulação não-conservativa

As equações de conservação da massa, quantidade de movimento e energia podem ser expressas, conforme descrito no Apêndice B, como

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho U) = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho U^2) + \frac{\partial P}{\partial x} = -F^w - \rho g_x \quad (3.2)$$

e

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{U^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho U \left(h + \frac{U^2}{2} \right) \right] = Q^w - \rho U g_x \quad (3.3)$$

onde, por unidade de volume, F^w representa a força cisalhante na parede do duto e Q^w denota o fluxo de calor que atravessa a mesma. Destaca-se que estes dois termos, embora considerados na solução do escoamento, não serão modelados em momento algum neste capítulo. Isto porque, no decorrer da etapa de validação, efetuada na seção 3.4, tal atividade não é exigida (esta tônica valerá também para os capítulos seguintes: serão modelados apenas os termos necessários à solução dos problemas-teste).

Expandindo as derivadas temporais e espaciais, e aplicando as devidas simplificações, as Equações (3.1) a (3.3) assumem uma forma não-conservativa, a saber,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial U}{\partial x} + U \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0 \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{F^w}{\rho} - g_x \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + U \frac{\partial e}{\partial x} + \frac{P}{\rho} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{\rho} (Q^w + F^w U) \quad (3.6)$$

A Equação (3.6) pode ainda ser expressa em função da variável entropia, através da relação de estado

$$\delta e = T \delta s + \frac{P}{\rho^2} \delta \rho \quad (3.7)$$

Assim,

$$T \frac{\partial s}{\partial t} + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial t} + U \left(T \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{P}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{P}{\rho} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{\rho} (Q^w + F^w U) \quad (3.8)$$

Rearranjando os termos,

$$T \frac{\partial s}{\partial t} + T U \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{P}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + U \frac{\partial \rho}{\partial x} \right) + \frac{P}{\rho} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{\rho} (Q^w + F^w U) \quad (3.9)$$

Substituindo a Equação (3.4) em (3.9),

$$T \frac{\partial s}{\partial t} + T U \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{P}{\rho^2} \left(-\rho \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{P}{\rho} \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{\rho} (Q^w + F^w U) \quad (3.10)$$

Desta forma,

$$\frac{\partial s}{\partial t} + U \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{1}{\rho T} (Q^w + F^w U) \quad (3.11)$$

Ainda, é mais conveniente escrever a Equação (3.4) em função da pressão P . Fazendo $\rho = \rho(P, s)$, tem-se que

$$\delta \rho = \left. \frac{\partial \rho}{\partial P} \right|_s \delta P + \left. \frac{\partial \rho}{\partial s} \right|_P \delta s \quad (3.12)$$

Da termodinâmica, pode-se demonstrar que

$$a = \sqrt{\left. \frac{\partial P}{\partial \rho} \right|_s} \quad (3.13)$$

$$\beta = -\left. \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \right|_P = -\left. \frac{c_P}{\rho T} \frac{\partial \rho}{\partial s} \right|_P \quad (3.14)$$

onde a denota a velocidade do som no fluido e β representa o coeficiente de expansão térmica. Desta maneira, a Equação (3.12) pode ser reescrita como

$$\delta\rho = \frac{1}{a^2} \delta P - \frac{\rho\beta T}{cp} \delta s \quad (3.15)$$

Aplicando agora a Equação (3.15) em (3.4),

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial P}{\partial t} - \frac{\rho\beta T}{cp} \frac{\partial s}{\partial t} + \rho \frac{\partial U}{\partial x} + U \left(\frac{1}{a^2} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\rho\beta T}{c_p} \frac{\partial s}{\partial x} \right) = 0 \quad (3.16)$$

Rearranjando os termos,

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial x} \right) - \frac{\rho\beta T}{cp} \left(\frac{\partial s}{\partial t} + U \frac{\partial s}{\partial x} \right) + \rho \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (3.17)$$

Substituindo a Equação (3.11) em (3.17),

$$\frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial x} \right) - \frac{\rho\beta T}{cp} \left[\frac{1}{\rho T} (Q^w + F^w U) \right] + \rho \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \quad (3.18)$$

Enfim, obtém-se a equação de conservação da massa expressa em função da pressão, dada por

$$\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial x} + \rho a^2 \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\beta a^2}{cp} (Q^w + F^w U) \quad (3.19)$$

As variáveis P , U e s das Equações (3.19), (3.5) e (3.11) podem ser dispostas como elementos de um vetor de incógnitas \vec{U} , ou seja,

$$\vec{U} = [P \quad U \quad s]^T \quad (3.20)$$

de maneira a se obter um sistema de EDPs da forma

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \mathbf{G} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = \vec{C} \quad (3.21)$$

onde a matriz de coeficientes \mathbf{G} é dada por

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} U & \rho a^2 & 0 \\ \frac{1}{\rho} & U & 0 \\ 0 & 0 & U \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

e o vetor \vec{C} , por

$$\vec{C} = \begin{bmatrix} \frac{\beta a^2}{cp} (Q^w + F^w U) \\ -\frac{F^w}{\rho} - g_x \\ \frac{1}{\rho T} (Q^w + F^w U) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

3.1.2 Formulação conservativa

A partir das equações de conservação expressas em (3.1) a (3.3), define-se o vetor de incógnitas na forma conservativa \vec{V} como sendo

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} \rho & \rho U & \rho \left(e + \frac{U^2}{2} \right) \end{bmatrix}^T = [\rho \quad G \quad E]^T \quad (3.24)$$

Assim, reparametrizando o sistema expresso na Equação (3.21) em função deste novo vetor, obtém-se

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{V}} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \mathbf{G} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{V}} \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = \vec{C} \quad (3.25)$$

ou então,

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{U}} \mathbf{G} \frac{\partial \vec{U}}{\partial \vec{V}} \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{U}} \vec{C} \quad (3.26)$$

A matriz Jacobiana é, por definição,

$$\mathbf{J} = \frac{\partial \vec{V}}{\partial \vec{U}} \quad (3.27)$$

Logo, substituindo-se a Equação (3.27) em (3.26), resulta

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \mathbf{J} \mathbf{G} \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = \mathbf{J} \vec{C} \quad (3.28)$$

O sistema conservativo pode, então, ser expresso como

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = \vec{D} \quad (3.29)$$

onde

$$\mathbf{H} = \mathbf{J} \mathbf{G} \mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a^2 - U^2 & 2U & 0 \\ Ua^2 - U \left(h + \frac{U^2}{2} \right) & \left(h + \frac{U^2}{2} \right) & U \end{bmatrix} +$$

$$-\frac{\beta a^2}{cp} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \left(h - \frac{U^2}{2} \right) & U & -1 \\ U \left(h - \frac{U^2}{2} \right) & U^2 & -U \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$\vec{D} = \mathbf{J} \vec{C} = \begin{bmatrix} 0 \\ -F^w - \rho g_x \\ Q^w - \rho U g_x \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

e

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 & \left. \frac{\partial \rho}{\partial s} \right|_P \\ \frac{U}{a^2} & \rho & U \left. \frac{\partial \rho}{\partial s} \right|_P \\ \frac{1}{a^2} \left(h + \frac{U^2}{2} \right) & \rho U & \rho T + \left. \frac{\partial \rho}{\partial s} \right|_P \left(h + \frac{U^2}{2} \right) \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{\rho T} \begin{bmatrix} a^2 \left[\rho T + \left. \frac{\partial \rho}{\partial s} \right|_P \left(h - \frac{U^2}{2} \right) \right] & Ua^2 \left. \frac{\partial \rho}{\partial s} \right|_P & -a^2 \left. \frac{\partial \rho}{\partial s} \right|_P \\ -UT & T & 0 \\ -\left(h - \frac{U^2}{2} \right) & -U & 1 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Vale lembrar que

$$\left. \frac{\partial \rho}{\partial s} \right|_p = -\frac{\rho \beta T}{cp} \quad (3.34)$$

3.2 ANÁLISE CARACTERÍSTICA

A análise característica de um sistema de EDPs consiste, primeiramente, na determinação dos autovalores e autovetores associados ao mesmo. Em seguida, estes são empregados na divisão (ou partição) da matriz de coeficientes do sistema. Embora se trate de um processo matemático em sua essência, será visto adiante que importantes aspectos físicos do escoamento podem ser explorados a partir desta análise.

3.2.1 Formulação não-conservativa

Conforme pode ser facilmente verificado, os autovalores da matriz de coeficientes \mathbf{G} são

$$\lambda_1 = U + a \quad (3.35)$$

$$\lambda_2 = U - a \quad (3.36)$$

$$\lambda_3 = U \quad (3.37)$$

Vê-se que os três autovalores obtidos representam velocidades características do escoamento. Os dois primeiros, λ_1 e λ_2 , podem ser entendidos como as velocidades com a qual uma perturbação qualquer de U ou P se propaga: a expressa na Equação (3.35) é sempre positiva, carregando, assim, a informação no sentido positivo de x ; já a descrita pela Equação (3.36), para escoamentos subsônicos como no caso em análise, será sempre negativa, e propagará a perturbação no sentido negativo de x , portanto. Por fim, o autovalor λ_3 indica que uma oscilação qualquer em s se desloca à velocidade local do escoamento U , e por isso não possui um sentido previamente estabelecido.

A matriz de autovalores $\mathbf{\Lambda}$, então, é dada por

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U+a & 0 & 0 \\ 0 & U-a & 0 \\ 0 & 0 & U \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Da solução da Equação (2.8), resulta

$$\vec{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\rho a} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$\vec{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{\rho a} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

$$\vec{T}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

e

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\rho a} & 0 \\ \frac{1}{\rho a} & -\frac{1}{\rho a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.42)$$

cuja inversa \mathbf{T}^{-1} equivale a

$$\mathbf{T}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \rho a & 0 \\ 1 & -\rho a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

Assim, partindo do procedimento descrito em 2.5.1.1, obtém-se

$$\mathbf{G}_1 = \mathbf{T}\mathbf{\Lambda}_1\mathbf{T}^{-1} = \frac{U+a}{2} \begin{bmatrix} 1 & \rho a & 0 \\ \frac{1}{\rho a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

$$\mathbf{G}_2 = \mathbf{T}\mathbf{\Lambda}_2\mathbf{T}^{-1} = \frac{U-a}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\rho a & 0 \\ -\frac{1}{\rho a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

e

$$\mathbf{G}_3 = \mathbf{T}\mathbf{\Lambda}_3\mathbf{T}^{-1} = U \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

Por último, construindo as matrizes \mathbf{G}^+ e \mathbf{G}^- associadas aos autovalores positivos e negativos, respectivamente,

$$\mathbf{G}^+ = \frac{U+a}{2} \begin{bmatrix} 1 & \rho a & 0 \\ \frac{1}{\rho a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{U+|U|}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$\mathbf{G}^- = \frac{U-a}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\rho a & 0 \\ -\frac{1}{\rho a} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{U-|U|}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Desta forma, a Equação (3.21) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \mathbf{G}^+ \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + \mathbf{G}^- \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = \vec{C} \quad (3.49)$$

3.2.2 Formulação conservativa

Para o sistema de EDPs expresso em termos de variáveis conservativas, pode-se demonstrar que os autovalores são os mesmos obtidos em 3.2.1. Não é necessário, neste caso, determinar de maneira direta os autovetores associados, uma vez que a decomposição da matriz de coeficientes \mathbf{H} pode ser efetuada através da expressão

$$\mathbf{H} = \mathbf{J}\mathbf{G}_1\mathbf{J}^{-1} + \mathbf{J}\mathbf{G}_2\mathbf{J}^{-1} + \mathbf{J}\mathbf{G}_3\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{H}_1 + \mathbf{H}_2 + \mathbf{H}_3 \quad (3.50)$$

chegando-se a

$$\mathbf{H}_1 = \frac{U+a}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ U+a \\ h + \frac{U^2}{2} + Ua \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 - \frac{U}{a} - \frac{\beta}{cp} \left(h - \frac{U^2}{2} \right) & \frac{1}{a} - \frac{\beta U}{cp} & \frac{\beta}{cp} \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

$$\mathbf{H}_2 = \frac{U-a}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ U-a \\ h + \frac{U^2}{2} - Ua \end{bmatrix} \times \left[1 + \frac{U}{a} - \frac{\beta}{cp} \left(h - \frac{U^2}{2} \right) \quad - \left(\frac{1}{a} + \frac{\beta U}{cp} \right) \quad \frac{\beta}{cp} \right] \quad (3.52)$$

$$\mathbf{H}_3 = U \begin{bmatrix} \frac{\beta}{cp} \\ \frac{\beta U}{cp} \\ \frac{\beta}{cp} \left(h + \frac{U^2}{2} \right) - 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} h - \frac{U^2}{2} & U & -1 \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

De maneira semelhante ao que foi feito para a formulação não-conservativa, constrói-se ainda as matrizes \mathbf{H}^+ e \mathbf{H}^- , obtendo-se

$$\mathbf{H}^+ = \mathbf{H}_1 + \frac{U+|U|}{2U} \mathbf{H}_3 \quad (3.54)$$

$$\mathbf{H}^- = \mathbf{H}_2 + \frac{U-|U|}{2U} \mathbf{H}_3 \quad (3.55)$$

Com isso, a Equação (3.29) pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \mathbf{H}^+ \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} + \mathbf{H}^- \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = \vec{D} \quad (3.56)$$

3.3 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Entende-se por implementação numérica a discretização do sistema de EDPs hiperbólicas, de forma a aproximá-lo por um sistema do tipo

$$\mathbf{A} \vec{X} = \vec{B} \quad (3.57)$$

Tendo em vista que tal procedimento já foi descrito nas seções 2.5.1.2 e 2.5.1.4, se acredita ser desnecessário repeti-lo nesta parte do trabalho. Registra-se apenas que, para o caso em análise, e utilizando o esquema de discretização de primeira ordem, a matriz de blocos \mathbf{A} é composta por 11 diagonais

contendo elementos não nulos (tanto para a formulação conservativa quanto para a não-conservativa). Este número passa para 17, caso a discretização empregada seja de segunda ordem. Os sistemas lineares serão resolvidos pelo *solver* GBAND.

3.4 VALIDAÇÃO: TUBO DE CHOQUE MONOFÁSICO

Um problema bastante conhecido, composto de um sistema de EDPs hiperbólicas, é a solução do escoamento no interior de um tubo de choque. Este é uma ferramenta importante para o estudo de escoamentos compressíveis a alta velocidade, sendo empregado na medição de propriedades termodinâmicas e químicas de fluidos a temperaturas elevadas, por exemplo. Mediante determinadas simplificações, o problema do tubo de choque possui solução analítica exata, conforme detalhado por Anderson (1982). Por esta razão, será adotado como caso de teste na validação dos modelos desenvolvidos neste capítulo.

3.4.1 Descrição do problema

O tubo de choque em análise é composto por duas câmaras dispostas horizontalmente, separadas por um diafragma. Tais câmaras contêm o mesmo fluido gasoso, ar, e estão submetidas a patamares distintos de temperatura e pressão. Considera-se adicionalmente que, no início, o gás está em repouso. Os demais detalhes do problema são ilustrados na Figura 3.1.

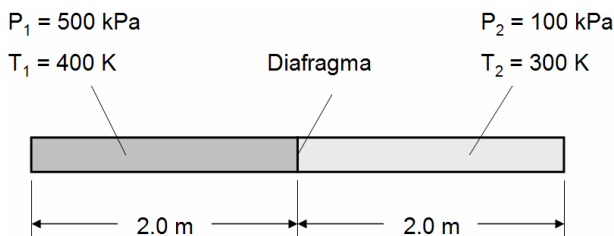


Figura 3.1 – Geometria e condições iniciais do problema.

Ao se retirar subitamente o diafragma, tem início um escoamento de característica fortemente transiente em direção à extremidade de menor pressão. Passados poucos instantes, podem

ser identificadas ao longo do tubo quatro regiões de propriedades uniformes, que são separadas umas das outras por (1) uma onda de choque que se propaga na região de baixa pressão, (2) uma descontinuidade que viaja em velocidade subsônica na mesma direção da onda de choque e (3) uma onda de rarefação que se desloca na região de alta pressão, conforme pode ser visualizado na Figura 3.2.

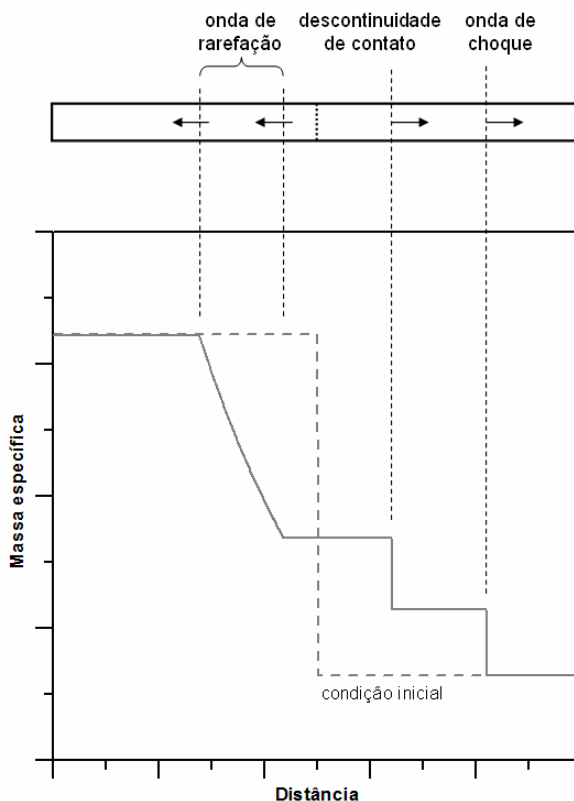


Figura 3.2 – Distribuição da massa específica no tubo de choque para um dado instante de tempo.

3.4.2 Hipóteses adicionais e condições de contorno

Para a presente análise, a força gravitacional não interfere nas equações de conservação, pois se considera que o tubo está

na posição horizontal. A tensão cisalhante na parede foi desprezada, bem como o fluxo de calor que atravessa a mesma. Desta forma,

$$g_x = 0 \quad (3.58)$$

$$F^w = 0 \quad (3.59)$$

$$Q^w = 0 \quad (3.60)$$

É importante notar que as simplificações expressas nas Equações (3.58) a (3.60) tornam nulos os vetores termo-fonte \vec{C} e \vec{D} , em (3.23) e (3.31).

Uma vez que o tubo de choque é limitado por duas paredes, deve-se assumir que, nestes pontos, a velocidade U é prescrita e igual a zero (idem para o fluxo de massa G , conseqüentemente). Admite-se, ainda, que a pressão P e a entropia s (ou então a massa específica ρ e a energia total E) na extrema esquerda do tubo são influenciadas apenas pelas informações carregadas pelos autovalores negativos, enquanto que, na extrema direita, tais propriedades podem ser alteradas apenas informações carregadas pelos autovalores positivos. A partir destas considerações e do que foi exposto nas seções 2.5.1.2 e 2.5.1.3, estão estabelecidas as condições de contorno necessárias para a solução do problema, conforme detalhado na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Condições de contorno do problema.

FORMULAÇÃO	VARIÁVEL	CC À ESQUERDA	CC À DIREITA
Não-conservat.	P	$\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{G}_1^- \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = C_1$	$\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{G}_1^+ \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = C_1$
	U	$U = 0$	$U = 0$
	s	$\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{G}_3^- \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = C_3$	$\frac{\partial s}{\partial t} + \vec{G}_3^+ \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = C_3$
Conservativa	ρ	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{H}_1^- \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = D_1$	$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{H}_1^+ \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = D_1$
	G	$G = 0$	$G = 0$
	E	$\frac{\partial E}{\partial t} + \vec{H}_3^- \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = D_3$	$\frac{\partial E}{\partial t} + \vec{H}_3^+ \frac{\partial \vec{V}}{\partial x} = D_3$

Adicionalmente, pelos motivos citados na seção 3.1, a formulação não-conservativa é incapaz de prever o acréscimo de entropia ocasionado pela passagem de uma onda de choque no fluido. Este fenômeno pode, entretanto, ser descrito através da expressão (Städtke, 2006, p.19)

$$\Delta s = cv \ln \left\{ R \left[\frac{R(\chi - 1) + (\chi + 1)}{R(\chi + 1) + (\chi - 1)} \right]^\chi \right\} \quad (3.61)$$

válida apenas para gases ideais, onde R denota a razão entre as pressões a jusante e a montante da onda de choque, e χ , o coeficiente isentrópico, definido como

$$\chi = \frac{cp}{cv} \quad (3.62)$$

Desta forma, o emprego da formulação não-conservativa exige que se acompanhe o deslocamento da onda de choque ao longo do tempo, corrigindo o campo de entropia nos locais necessários.

3.4.3 Malha computacional e procedimento de solução

A malha computacional empregada foi a mesma para todos os casos, consistindo de 4001 nós igualmente espaçados em $1mm$. Adotou-se um incremento de tempo Δt igual a $1 \times 10^{-6} s$, sendo que a simulação é finalizada em $t_{\max} = 3ms$. O procedimento de solução dentro de um determinado passo de tempo consiste das seguintes etapas:

1. Admite-se que os campos são iguais aos obtidos no passo de tempo anterior.
2. Obtém-se o vetor \vec{B} . Note que, por causa das hipóteses simplificativas, este só depende de valores calculados no passo de tempo anterior.
3. Calcula-se os autovalores em cada nó.
4. Determina-se os coeficientes de \mathbf{A} .
5. Resolve-se a Equação (3.57) via GBAND, de modo a se obter novos campos de P , U e s , ou de ρ , G e E .

6. A partir dos campos atualizados de P e s (ou então de ρ e e), se determina as demais propriedades termodinâmicas em cada nó, por meio de equações de estado. Para tal, assumiu-se a hipótese de gás ideal.
7. Retorna-se ao passo 3 até a convergência dos campos. O critério de convergência foi estabelecido com base na diferença absoluta dos valores das variáveis em cada nó, entre duas iterações sucessivas. As tolerâncias aplicadas estão na Tabela 3.2.

Tabela 3.2 – Tolerâncias aplicadas à convergência dos campos.

FORMULAÇÃO	VARIÁVEL	TOLERÂNCIA
Não-conservativa	P [Pa]	1×10^{-1}
	U [m/s]	1×10^{-2}
	s [J/kgK]	1×10^{-2}
Conservativa	ρ [kg/m ³]	1×10^{-6}
	G [kg/m ² s]	1×10^{-2}
	E [J/m ³]	1×10^{-2}

Cabe ainda destacar que o procedimento de cálculo acima descrito (bem como todos os problemas-teste a serem abordados nos capítulos seguintes) foi implementado em linguagem FORTRAN, dada a simplicidade de sua sintaxe e a alta eficiência computacional de seus compiladores. O código-fonte do *solver* GBAND na referida linguagem de programação consta no Apêndice C.

3.4.4 Resultados

A seguir, são comparados os resultados obtidos a partir das duas formulações (empregando, para cada uma, esquemas numéricos de primeira e segunda ordem) com a solução analítica exata do problema.

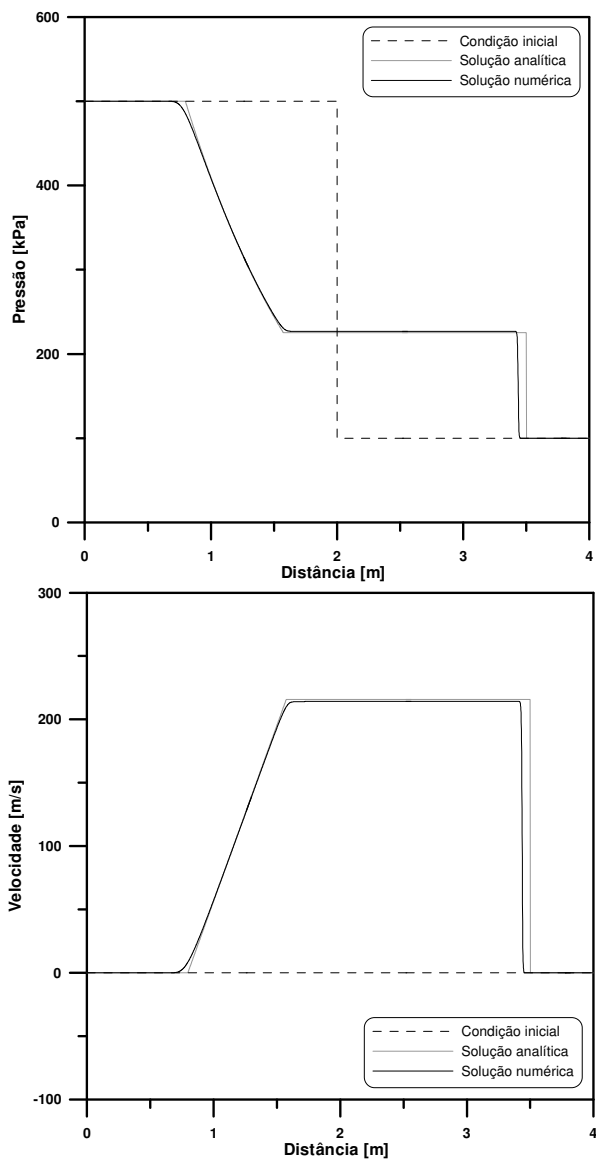


Figura 3.3 – Campos de pressão e velocidade em $t = 3ms$. Comparação da solução analítica exata com os resultados numéricos obtidos pela formulação não-conservativa de primeira ordem.

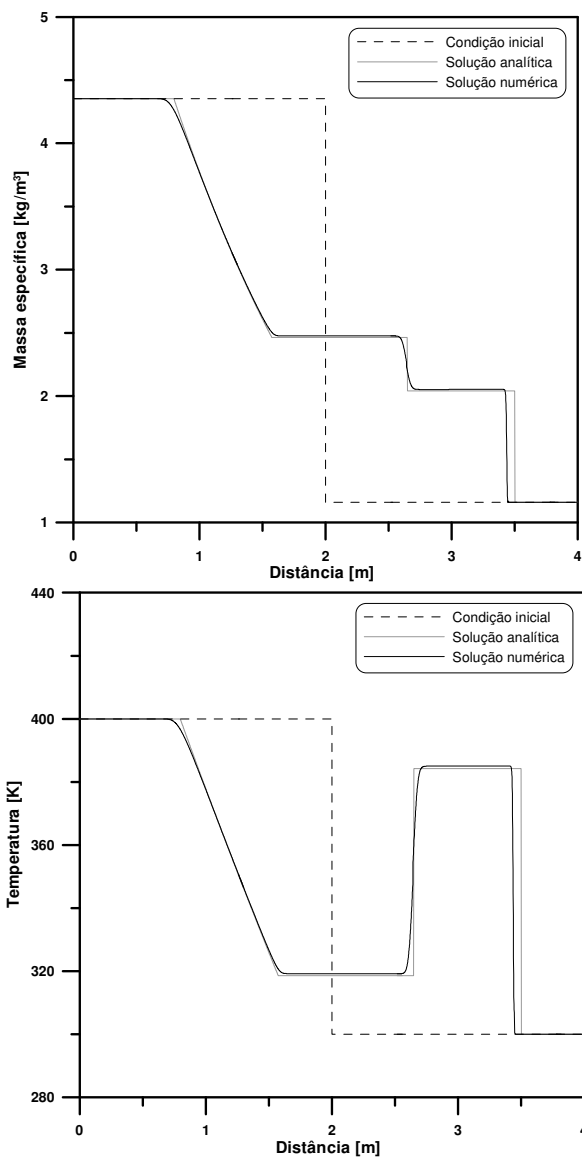


Figura 3.4 – Campos de massa específica e temperatura em $t = 3ms$. Comparação da solução analítica exata com os resultados numéricos obtidos pela formulação não-conservativa de primeira ordem.

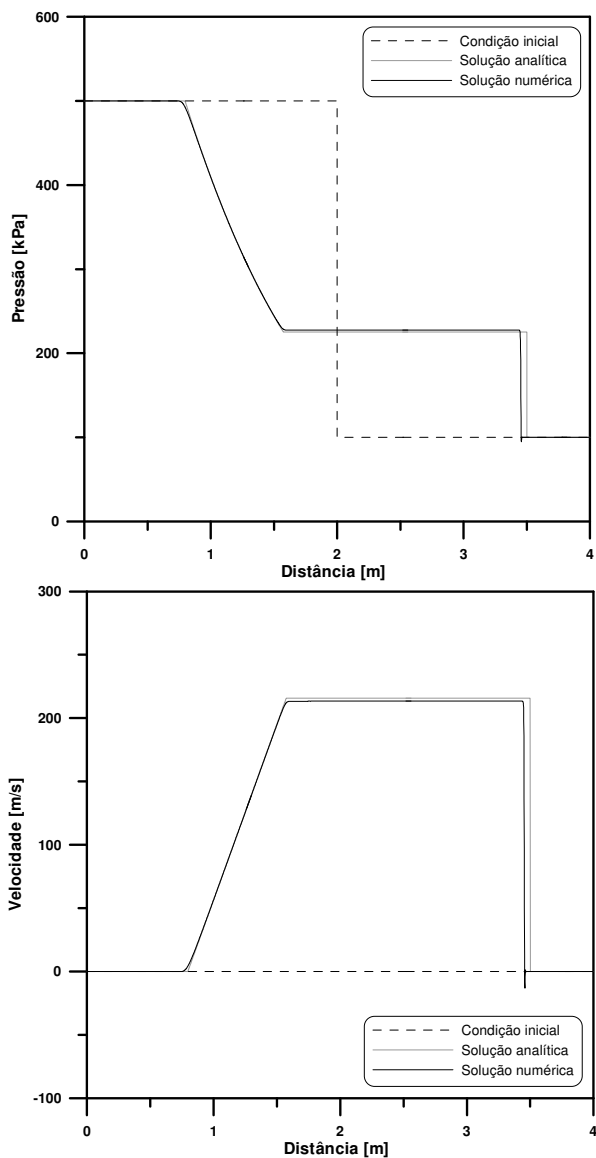


Figura 3.5 – Campos de pressão e velocidade em $t = 3ms$. Comparação da solução analítica exata com os resultados numéricos obtidos pela formulação não-conservativa de segunda ordem.

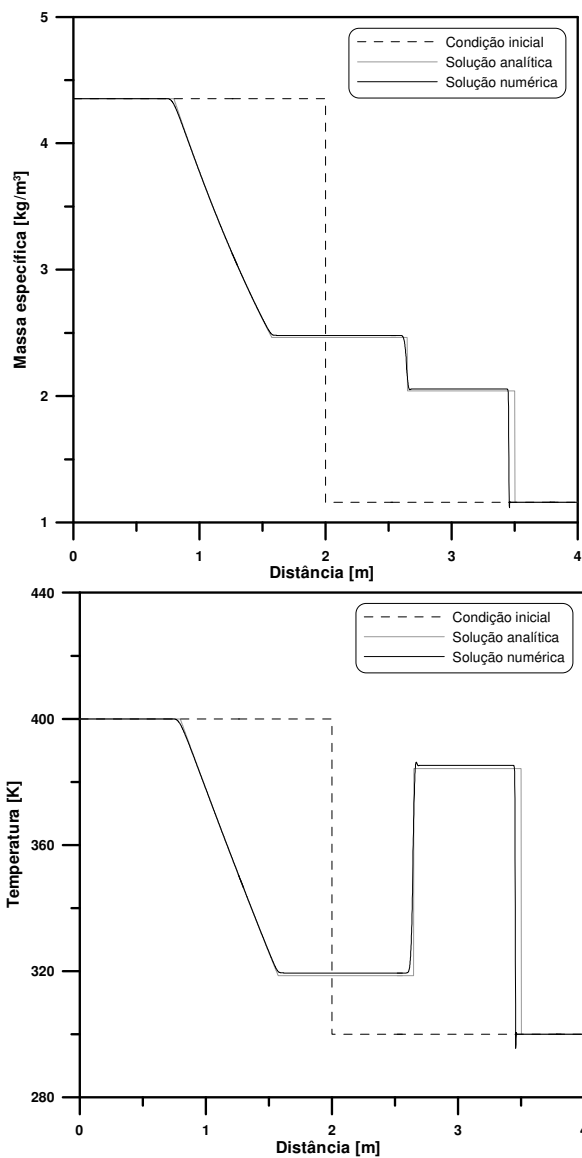


Figura 3.6 – Campos de massa específica e temperatura em $t = 3ms$. Comparação da solução analítica exata com os resultados numéricos obtidos pela formulação não-conservativa de segunda ordem.

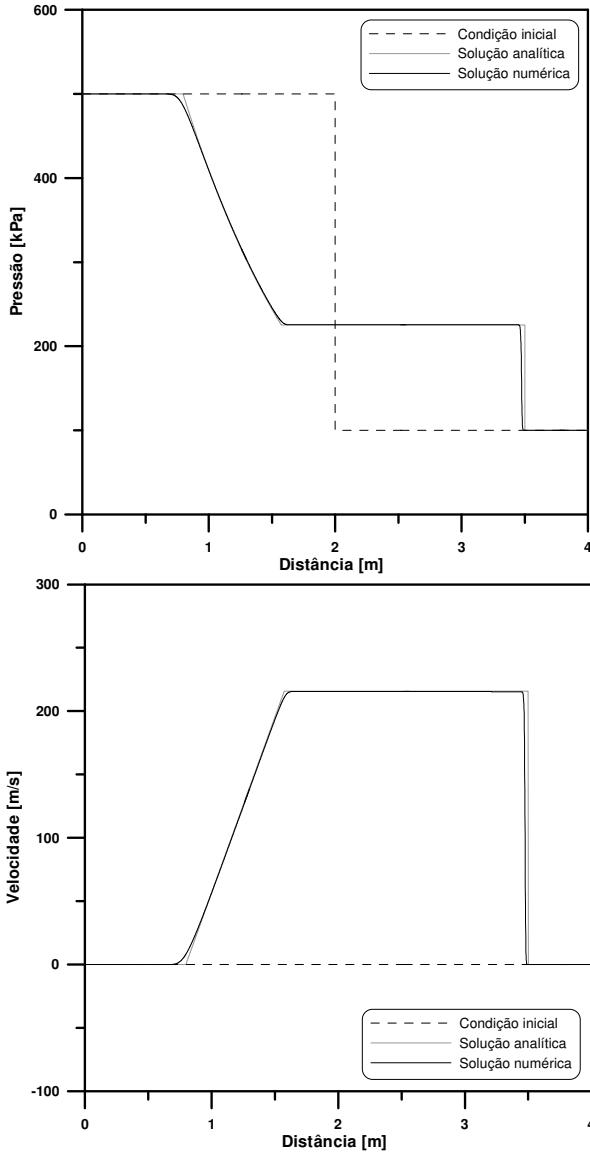


Figura 3.7 – Campos de pressão e velocidade em $t = 3\text{ms}$. Comparação da solução analítica exata com os resultados numéricos obtidos pela formulação conservativa de primeira ordem.

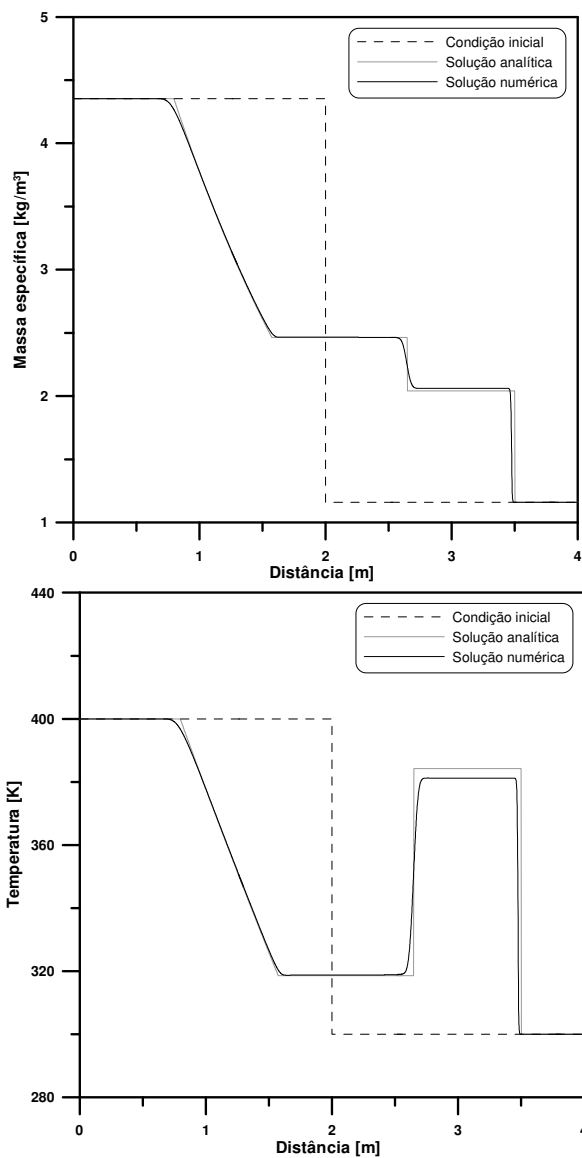


Figura 3.8 – Campos de massa específica e temperatura em $t = 3ms$. Comparação da solução analítica exata com os resultados numéricos obtidos pela formulação conservativa de primeira ordem.

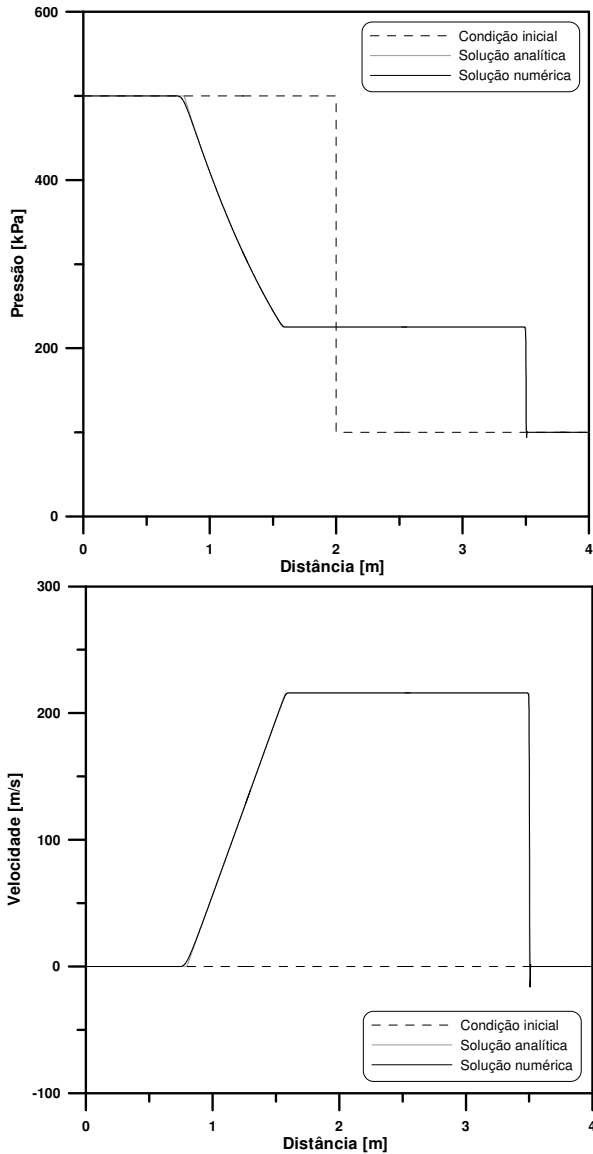


Figura 3.9 – Campos de pressão e velocidade em $t = 3ms$. Comparação da solução analítica exata com os resultados numéricos obtidos pela formulação conservativa de segunda ordem.

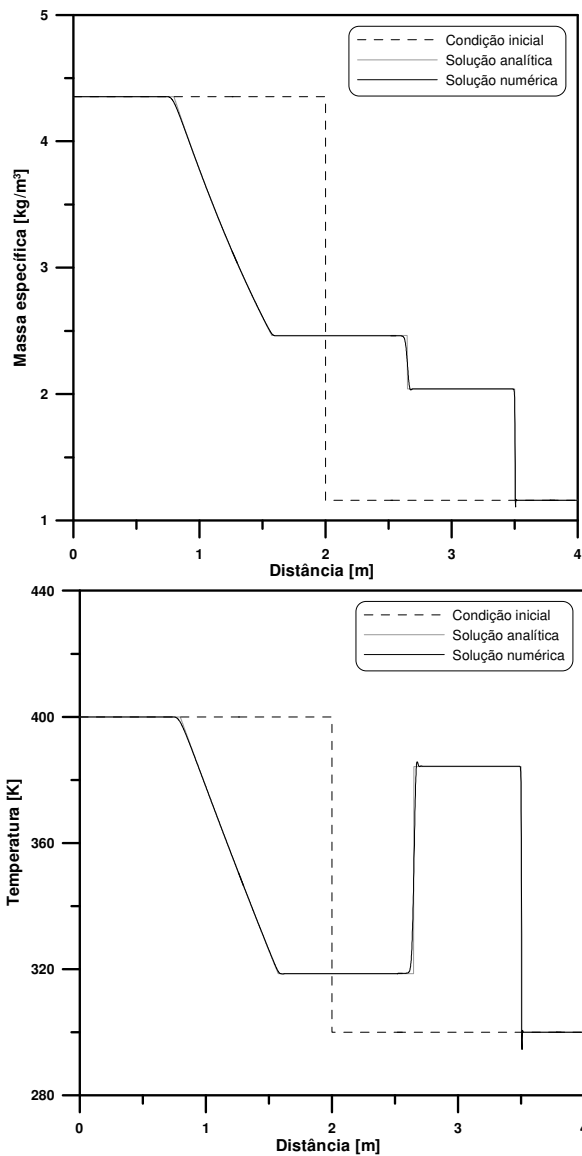


Figura 3.10 – Campos de massa específica e temperatura em $t = 3ms$. Comparação da solução analítica exata com os resultados numéricos obtidos pela formulação conservativa de segunda ordem.

Conforme pode ser visto nas Figuras 3.3 a 3.10, os campos calculados pela formulação conservativa acompanham de maneira mais adequada o deslocamento da onda de choque na região de baixa pressão; esta conclusão poderia ser obtida de forma intuitiva, uma vez que se sabe que as variáveis conservativas são as mais adequadas na caracterização de escoamentos fortemente transientes, como o caso em análise.

Olhando agora apenas as Figuras 3.3, 3.4, 3.7 e 3.8, observa-se que as soluções numéricas apresentam uma tendência de suavização das descontinuidades. Este fenômeno, por não possuir qualquer relação com mecanismos físicos de difusão, é freqüentemente chamado de difusão numérica. Sua ocorrência está associada ao emprego de esquemas de interpolação de ordem ímpar.

As Figuras 3.5, 3.6, 3.9 e 3.10, por sua vez, apresentam outro padrão de comportamento das soluções numéricas nas adjacências de descontinuidades: trata-se de instabilidades de aspecto ondulatório, ao que se denomina dispersão numérica. Sua existência é atribuída a esquemas de interpolação de ordem par.

Nota-se, enfim, que os resultados obtidos a partir de esquemas de segunda ordem aproximam-se mais da solução analítica exata do que os de primeira ordem.

Na Tabela 3.3, é trazido o erro médio (baseado na média aritmética das diferenças absolutas entre o valor exato e o calculado, tomadas para cada ponto do domínio) dos campos de pressão, velocidade, massa específica e temperatura para os quatro casos estudados, bem como seus respectivos tempos computacionais.

Tabela 3.3 – Erros médios absolutos e tempos computacionais.

FORMULAÇÃO	ERRO MÉDIO				TC [s]
	P [Pa]	U [m/s]	ρ [kg/m ³]	T [K]	
Não-conserv. 1a ordem	3339	4,65	0,0253	2,14	90
Não-conserv. 2a ordem	2713	3,87	0,0201	1,67	203
Conservativa 1a ordem	1555	2,02	0,0161	1,74	178
Conservativa 2a ordem	311,6	0,331	0,00354	0,310	336

Além de corroborar a análise feita nos parágrafos anteriores, a Tabela 3.3 mostra ainda que os esquemas de segunda ordem e conservativos requerem maior esforço computacional do que os esquemas de primeira ordem e não-conservativos.

3.5 SUMÁRIO

Neste capítulo, foram desenvolvidos modelos de escoamento monofásico compressível. Embora não faça parte do objetivo específico do trabalho, este estudo possibilitou o desenvolvimento de ferramentas para análise de escoamentos mais complexos, que serão tratados posteriormente.

Os modelos apresentaram diferentes formulações (não-conservativa e conservativa) e esquemas de interpolação (de primeira e segunda ordem), sendo validados através do problema-teste do tubo de choque monofásico, que possui solução analítica exata. Constatou-se que a escolha por variáveis conservativas resulta na melhor caracterização de descontinuidades, como ondas de choque, muito embora tal opção exija uma maior manipulação algébrica do sistema de equações de conservação. Também foi verificado que os esquemas de interpolação de primeira ordem propiciam o surgimento de difusão numérica, enquanto que, no esquema de segunda ordem, predominam os efeitos da dispersão numérica. Os resultados obtidos a partir deste último se mostraram mais próximos da solução exata do que os advindos do esquema de primeira ordem, embora tenham exigido maiores tempos computacionais. O mesmo foi verificado para a formulação conservativa, se comparada à não-conservativa.

4 ESCOAMENTO BIFÁSICO: MODELOS HOMOGÊNEOS

Os modelos homogêneos são a maneira mais simples de se representar escoamentos bifásicos. Nestes, assume-se que as forças de arrasto interfacial são dominantes a ponto de tornar desprezível a velocidade relativa entre as fases líquida e gasosa, de maneira que

$$U_l = U_g = U \quad (4.1)$$

Tal aproximação é válida principalmente para escoamentos em névoa (onde o líquido se encontra na forma de pequenas partículas atomizadas, estando totalmente diluída numa fase contínua de gás) e em bolhas dispersas (onde o gás escoar na forma de bolhas de pequeno diâmetro e está totalmente contido numa fase líquida contínua). Para os demais padrões, deve-se usar de cautela, uma vez que o modelo não considera alguns efeitos de importância prática. Nestes casos, entretanto, os resultados obtidos ainda podem ser utilizados para uma análise preliminar (Lu, Simpson e Gilchrist, 1996), partindo-se em um segundo momento para modelos mais sofisticados.

Os assuntos do capítulo foram dispostos na seguinte ordem: a seção 4.1 aborda os sistemas de equações de conservação originários das hipóteses de não-equilíbrio e equilíbrio termodinâmico, com a análise das respectivas características sendo efetuada na seção subsequente. Na seção 4.3, trata-se da modelagem dos termos de transporte da quantidade de movimento (ocasionado pela força de cisalhamento exercida pela parede do duto) e da energia (advindo da troca de calor entre as fases de líquido e de gás). As propriedades dos sistemas de equações lineares são brevemente descritas na seção 4.4. Já as seções 4.5 e 4.6 são dedicadas à validação dos modelos, através da solução do problema do tubo de choque bifásico e do escoamento ascendente em dutos verticais, nesta ordem. Por fim, na seção 4.7, sumariza-se as principais atividades e conclusões do capítulo.

4.1 SISTEMAS DE EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO

Conforme foi mencionado na seção 2.3.2, o acoplamento térmico das fases pode ser abordado por meio de dois modelos distintos, a saber:

- a) Modelo de não-equilíbrio termodinâmico: assume que, em princípio, as fases de líquido e gás em um determinado ponto do escoamento podem estar a temperaturas diferentes, cada qual sendo função de suas respectivas equações de conservação da energia. Trata-se de um modelo mais generalista;
- b) Modelo de equilíbrio termodinâmico: considera que, para qualquer ponto do escoamento, as fases líquida e gasosa se encontram à mesma temperatura, de modo que, na determinação desta, apenas uma equação de conservação da energia se faz necessária. Trata-se de um caso particular do modelo anterior.

As equações de conservação relativas aos modelos de não-equilíbrio e equilíbrio serão abordadas nas seções 4.1.1 e 4.1.2, nesta ordem. Para ambos os casos, empregar-se-á a formulação não-conservativa, uma vez que esta envolve uma menor manipulação algébrica do sistema.

4.1.1 Modelo de não-equilíbrio

As equações de conservação da massa, quantidade de movimento e energia para as fases líquida e gasosa podem ser expressas por

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_g \rho_g U) = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_l \rho_l) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_l \rho_l U) = 0 \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g U) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_g \rho_g U^2) + \alpha_g \frac{\partial P}{\partial x} = F_g^{\text{int}} - F_g^w - \alpha_g \rho_g g_x \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_l \rho_l U) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_l \rho_l U^2) + \alpha_l \frac{\partial P}{\partial x} = F_l^{\text{int}} - F_l^w - \alpha_l \rho_l g_x \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g s_g) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_g \rho_g U s_g) = \frac{1}{T_g} (Q_g^{\text{int}} + Q_g^w + F_g^w U) \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_l \rho_l s_l) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_l \rho_l U s_l) = \frac{1}{T_l} (Q_l^{\text{int}} + Q_l^w + F_l^w U) \quad (4.7)$$

onde α_k , F_k^{int} e Q_k^{int} representam respectivamente a fração volumétrica, a força de arrasto (por unidade de volume) e o fluxo de calor interfacial (também por unidade de volume) na fase k . Além disso, as seguintes relações complementares são válidas em todos os pontos do domínio:

$$\alpha_g + \alpha_l = 1 \quad (4.8)$$

$$F_l^{\text{int}} = -F_g^{\text{int}} \quad (4.9)$$

$$Q_l^{\text{int}} = -Q_g^{\text{int}} \quad (4.10)$$

Expandindo as derivadas espaciais e temporais das Equações (4.2) e (4.3), para em seguida aplicar a relação de estado dada por

$$\delta p_k = \frac{1}{a_k^2} \delta P - \frac{\rho_k \beta_k T_k}{c p_k} \delta s_k \quad (4.11)$$

obtem-se

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_g}{a_g^2} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \rho_g \left(\frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + U \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} \right) - \alpha_g \left(\frac{\rho_g \beta_g T_g}{c p_g} \right) \left(\frac{\partial s_g}{\partial t} + U \frac{\partial s_g}{\partial x} \right) + \\ + \alpha_g \rho_g \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_l}{a_l^2} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial x} \right) - \rho_l \left(\frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + U \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} \right) - \alpha_l \left(\frac{\rho_l \beta_l T_l}{c p_l} \right) \left(\frac{\partial s_l}{\partial t} + U \frac{\partial s_l}{\partial x} \right) + \\ + \alpha_l \rho_l \frac{\partial U}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Somando as Equações (4.4) e (4.5), chega-se à equação de conservação da quantidade de movimento da mistura. Da expansão de suas derivadas, resulta

$$\rho \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} \right) + \frac{\partial P}{\partial x} = -F_g^w - F_l^w - \rho g_x \quad (4.14)$$

onde ρ denota a massa específica da mistura de líquido e gás, definida como

$$\rho = \alpha_g \rho_g + \alpha_l \rho_l \quad (4.15)$$

Por último, expandindo as derivadas das Equações (4.6) e (4.7), respectivamente, chega-se a

$$\alpha_g \rho_g \left(\frac{\partial s_g}{\partial t} + U \frac{\partial s_g}{\partial x} \right) = \frac{1}{T_g} (Q_g^{\text{int}} + Q_g^w + F_g^w U) \quad (4.16)$$

$$\alpha_l \rho_l \left(\frac{\partial s_l}{\partial t} + U \frac{\partial s_l}{\partial x} \right) = \frac{1}{T_l} (Q_l^{\text{int}} + Q_l^w + F_l^w U) \quad (4.17)$$

As variáveis das Equações (4.12) a (4.14), (4.16) e (4.17) podem agora ser dispostas na forma de um vetor de incógnitas \vec{U} , tal que

$$\vec{U} = [P \quad \alpha_g \quad U \quad s_g \quad s_l]^T \quad (4.18)$$

de maneira a se obter um sistema de equações diferenciais da forma

$$\mathbf{E} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \mathbf{F} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = \vec{C}^* \quad (4.19)$$

onde as matrizes \mathbf{E} e \mathbf{F} equivalem a, respectivamente,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_g}{a_g^2} & \rho_g & 0 & -\alpha_g \left(\frac{\rho_g \beta_g T_g}{c p_g} \right) & 0 \\ \frac{\alpha_l}{a_l^2} & -\rho_l & 0 & 0 & -\alpha_l \left(\frac{\rho_l \beta_l T_l}{c p_l} \right) \\ 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_g \rho_g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_l \rho_l \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_g U}{a_g^2} & \rho_g U & \alpha_g \rho_g & -\alpha_g U \left(\frac{\rho_g \beta_g T_g}{c p_g} \right) & 0 \\ \frac{\alpha_l U}{a_l^2} & -\rho_l U & \alpha_l \rho_l & 0 & -\alpha_l U \left(\frac{\rho_l \beta_l T_l}{c p_l} \right) \\ 1 & 0 & \rho U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_g \rho_g U & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_l \rho_l U \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

e o vetor termo-fonte \vec{C}^* , a

$$\vec{C}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F_g^w - F_l^w - \rho g_x \\ \frac{1}{T_g} (Q_g^{\text{int}} + Q_g^w + F_g^w U) \\ \frac{1}{T_l} (Q_l^{\text{int}} + Q_l^w + F_l^w U) \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Multiplicando ambos os lados da Equação (4.19) pela matriz inversa de \mathbf{E} , resulta

$$\mathbf{E}^{-1} \mathbf{E} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \mathbf{E}^{-1} \mathbf{F} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = \mathbf{E}^{-1} \vec{C}^* \quad (4.23)$$

ou simplesmente

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \mathbf{G} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = \vec{C} \quad (4.24)$$

onde a matriz de coeficientes \mathbf{G} é dada por

$$\mathbf{G} = \mathbf{E}^{-1} \mathbf{F} = \begin{bmatrix} U & 0 & \rho a^2 & 0 & 0 \\ 0 & U & -\alpha_g \alpha_l \left(\frac{1}{\rho_g a_g^2} - \frac{1}{\rho_l a_l^2} \right) \rho a^2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho} & 0 & U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

e o vetor termo-fonte \vec{C} , por

$$\vec{C} = \mathbf{E}^{-1} \vec{C}^* = \begin{bmatrix} \rho a^2 \left(\frac{\beta_g}{\rho_g c p_g} S_g + \frac{\beta_l}{\rho_l c p_l} S_l \right) \\ \rho a^2 \left(\frac{\alpha_l}{\rho_l a_l^2} \frac{\beta_g}{\rho_g c p_g} S_g - \frac{\alpha_g}{\rho_g a_g^2} \frac{\beta_l}{\rho_l c p_l} S_l \right) \\ - \frac{F_g^w}{\rho} - \frac{F_l^w}{\rho} - g_x \\ \frac{S_g}{\alpha_g \rho_g} \\ \frac{S_l}{\alpha_l \rho_l} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

Por sua vez, a expressão para a velocidade do som da mistura a pode ser facilmente obtida através de manipulação algébrica. O procedimento, descrito e representado no Apêndice D em linguagem MAPLE, pode ser estendido também para os modelos dos capítulos subsequentes. Deste, resulta que

$$a = \sqrt{\frac{\rho_g a_g^2 \rho_l a_l^2}{\rho (\alpha_g \rho_l a_l^2 + \alpha_l \rho_g a_g^2)}} \quad (4.27)$$

Ainda,

$$S_g = \frac{1}{T_g} (Q_g^{\text{int}} + Q_g^w + F_g^w U) \quad (4.28)$$

$$S_l = \frac{1}{T_l} (Q_l^{\text{int}} + Q_l^w + F_l^w U) \quad (4.29)$$

4.1.2 Modelo de equilíbrio

Mencionou-se anteriormente que o modelo de equilíbrio termodinâmico requer apenas uma equação de conservação da energia. Isto se dá porque, ao se estabelecer uma relação termodinâmica na qual as temperaturas das fases são igualadas, obtém-se uma relação direta entre a entropia do gás s_g e a do

líquido s_l , que pode ser posteriormente incorporada ao termo-fonte da equação de conservação de uma das fases, conforme será discutido na seção 4.3.2.2. Logo, fazendo uso da dita equação referente à fase gasosa, chega-se a um sistema muito semelhante ao desenvolvido na seção 4.1.1, embora de ordem inferior, cujo vetor de incógnitas é expresso como

$$\vec{U} = [P \quad \alpha_g \quad U \quad s_g]^T \quad (4.30)$$

e cuja matriz de coeficientes e vetor termo-fonte são dados respectivamente por

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} U & 0 & \rho a^2 & 0 \\ 0 & U & -\alpha_g \alpha_l \left(\frac{1}{\rho_g a_g^2} - \frac{1}{\rho_l a_l^2} \right) \rho a^2 & 0 \\ \frac{1}{\rho} & 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$\vec{C} = \begin{bmatrix} \rho a^2 \left(\frac{\beta_g T}{\rho_g c p_g} S_g + \frac{\beta_l T}{\rho_l c p_l} S_l \right) \\ \rho a^2 \left(\frac{\alpha_l}{\rho_l a_l^2} \frac{\beta_g T}{\rho_g c p_g} S_g - \frac{\alpha_g}{\rho_g a_g^2} \frac{\beta_l T}{\rho_l c p_l} S_l \right) \\ -\frac{F_g^w}{\rho} - \frac{F_l^w}{\rho} - g_x \\ \frac{S_g}{\alpha_g \rho_g} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

onde, da condição de equilíbrio,

$$T_l = T_g = T \quad (4.33)$$

Desta maneira, constata-se que a principal diferença entre os modelos homogêneos desenvolvidos no presente trabalho reside na modelagem do fluxo de calor interfacial, a ser tratada na seção 4.3.2.

4.2 ANÁLISE CARACTERÍSTICA

Nesta seção, serão resolvidos os problemas de autovalores e autovetores para os modelos de não-equilíbrio e de equilíbrio termodinâmico, com vistas à divisão das respectivas matrizes de coeficientes e subsequente aplicação do SCMM.

4.2.1 Modelo de não-equilíbrio

Os autovalores da matriz de coeficientes **G**, bem como seus respectivos autovetores associados, são listados na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Autovalores e autovetores da matriz de coeficientes.

AUTOVALOR	AUTOVETOR ASSOCIADO
$\lambda_1 = U + a$	$\vec{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_g \alpha_l \left(\frac{1}{\rho_g a_g^2} - \frac{1}{\rho_l a_l^2} \right) & \frac{1}{\rho a} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$
$\lambda_2 = U - a$	$\vec{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_g \alpha_l \left(\frac{1}{\rho_g a_g^2} - \frac{1}{\rho_l a_l^2} \right) & -\frac{1}{\rho a} & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$
$\lambda_3 = U$	$\vec{T}_3 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$
$\lambda_4 = U$	$\vec{T}_4 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T$
$\lambda_5 = U$	$\vec{T}_5 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$

Da Tabela 4.1, observa-se primeiramente que todos os autovalores são números reais, e que, mesmo havendo autovalores idênticos, ainda é possível se obter um conjunto de autovetores linearmente independentes. Estes dois fatos confirmam outra vantagem dos modelos homogêneos: a hiperbolicidade do sistema de equações, o que assegura a estabilidade do método numérico de solução.

A matriz diagonal de autovalores **Λ** equivale a

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U+a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U-a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

A matriz de transformação \mathbf{T} , por sua vez, é dada por

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha_g \alpha_l \left(\frac{1}{\rho_g a_g^2} - \frac{1}{\rho_l a_l^2} \right) & -\alpha_g \alpha_l \left(\frac{1}{\rho_g a_g^2} - \frac{1}{\rho_l a_l^2} \right) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\rho a} & -\frac{1}{\rho a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Logo, aplicando a decomposição descrita na seção 2.5.1.1, obtém-se

$$\mathbf{G}_1 = \frac{U+a}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -\alpha_g \alpha_l \left(\frac{1}{\rho_g a_g^2} - \frac{1}{\rho_l a_l^2} \right) \\ \frac{1}{\rho a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times [1 \quad 0 \quad \rho a \quad 0 \quad 0] \quad (4.36)$$

$$\mathbf{G}_2 = \frac{U-a}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ -\alpha_g \alpha_l \left(\frac{1}{\rho_g a_g^2} - \frac{1}{\rho_l a_l^2} \right) \\ -\frac{1}{\rho a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times [1 \quad 0 \quad -\rho a \quad 0 \quad 0] \quad (4.37)$$

$$\mathbf{G}_3 = U \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_g \alpha_l \left(\frac{1}{\rho_g a_g^2} - \frac{1}{\rho_l a_l^2} \right) & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$$\mathbf{G}_4 = U \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$\mathbf{G}_5 = U \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Por fim, somando as matrizes de mesmo sentido de propagação, obtém-se

$$\mathbf{G}^+ = \mathbf{G}_1 + \frac{U + |U|}{2U} (\mathbf{G}_3 + \mathbf{G}_4 + \mathbf{G}_5) \quad (4.41)$$

$$\mathbf{G}^- = \mathbf{G}_2 + \frac{U - |U|}{2U} (\mathbf{G}_3 + \mathbf{G}_4 + \mathbf{G}_5) \quad (4.42)$$

Assim, é possível reescrever a Equação (4.24) como

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \mathbf{G}^+ \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + \mathbf{G}^- \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = \vec{C} \quad (4.43)$$

4.2.2 Modelo de equilíbrio

Conforme pode ser facilmente verificado, o problema de autovalores e autovetores para o modelo homogêneo de equilíbrio

termodinâmico equivale ao abordado na seção anterior, exceto pela inexistência dos termos associados à entropia do líquido s_l (o problema fica reduzido à quarta ordem, portanto). Assim sendo, a decomposição da matriz de coeficientes \mathbf{G} se resume a

$$\mathbf{G}_1 = \frac{U+a}{2} \begin{bmatrix} -\alpha_g \alpha_l \left(\frac{1}{\rho_g a_g^2} - \frac{1}{\rho_l a_l^2} \right) \\ \frac{1}{\rho a} \\ 0 \end{bmatrix} \times [1 \quad 0 \quad \rho a \quad 0] \quad (4.44)$$

$$\mathbf{G}_2 = \frac{U-a}{2} \begin{bmatrix} -\alpha_g \alpha_l \left(\frac{1}{\rho_g a_g^2} - \frac{1}{\rho_l a_l^2} \right) \\ -\frac{1}{\rho a} \\ 0 \end{bmatrix} \times [1 \quad 0 \quad -\rho a \quad 0] \quad (4.45)$$

$$\mathbf{G}_3 = U \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_g \alpha_l \left(\frac{1}{\rho_g a_g^2} - \frac{1}{\rho_l a_l^2} \right) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

$$\mathbf{G}_4 = U \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

e, conseqüentemente,

$$\mathbf{G}^+ = \mathbf{G}_1 + \frac{U+|U|}{2U} (\mathbf{G}_3 + \mathbf{G}_4) \quad (4.48)$$

$$\mathbf{G}^- = \mathbf{G}_2 + \frac{U-|U|}{2U} (\mathbf{G}_3 + \mathbf{G}_4) \quad (4.49)$$

4.3 MODELAGEM DOS TERMOS DE TRANSPORTE

A modelagem dos termos-fonte dos sistemas de equações obtidos na seção 4.1 pode ser feita de diversas maneiras, sendo que as próximas linhas tratarão de apenas uma delas. Nesta, parte-se da premissa de que modelos homogêneos de escoamento bifásico são adequados apenas na caracterização de escoamentos em névoa ou em bolhas dispersas (onde as forças de arrasto interfacial minimizam a diferença de velocidade entre as fases), padrões para os quais a modelagem dos termos de transporte deve assumir a existência de uma fase discreta, que se encontra na forma de pequenas partículas de forma aproximadamente esférica, e de uma fase contínua, que está em contato com toda a superfície do duto pelo qual escoam. Assim, caso a fase contínua seja a de gás, tem-se que

$$F_l^w = 0 \quad (4.50)$$

$$Q_l^w = 0 \quad (4.51)$$

Do contrário, ou seja, caso a fase contínua seja a líquida, as Equações (4.50) e (4.51) deixam de ser válidas e

$$F_g^w = 0 \quad (4.52)$$

$$Q_g^w = 0 \quad (4.53)$$

4.3.1 Transporte da quantidade de movimento

A força de cisalhamento exercida pela parede do duto sobre a fase contínua k é expressa, por unidade de volume, como

$$F_k^w = \frac{4}{D} \tau_w \quad (4.54)$$

onde

$$\tau_w = \frac{1}{2} f_w \rho |U| U \quad (4.55)$$

O fator de atrito de Fanning f_w , por sua vez, pode ser calculado através da equação de Colebrook-White (Colebrook, 1939) em uma forma modificada,

$$\frac{1}{f_w^{0,5}} = -4,0 \log \left(\frac{e}{3,7D} + \frac{1,255}{Re_D f_w^{0,5}} \right) \quad (4.56)$$

onde e representa a rugosidade absoluta do duto, e o número de Reynolds da mistura Re_D equivale a

$$Re_D = \frac{\rho U D}{\mu_k} \quad (4.57)$$

Cabe ressaltar que a equação de Colebrook-White é válida somente para escoamentos turbulentos, para os quais é de costume se estabelecer $Re_D > 4000$.

4.3.2 Transporte da energia

De acordo com o que foi mencionado anteriormente, a diferença entre os modelos homogêneos desenvolvidos neste trabalho reside basicamente na modelagem do fluxo de calor interfacial para as hipóteses de não-equilíbrio e equilíbrio termodinâmico, a ser tratada nesta seção.

4.3.2.1 Modelo de não-equilíbrio

A taxa com que calor é trocado entre as fases de gás e de líquido por unidade de volume será modelada pela lei de resfriamento de Newton. Portanto, na existência de uma fase contínua gasosa,

$$Q_g^{\text{int}} = -h_{\text{int}} a_{\text{int}} \Delta T \quad (4.58)$$

onde h_{int} representa o coeficiente interfacial de transferência de calor por convecção interfacial, ΔT é definido como

$$\Delta T = T_g - T_l \quad (4.59)$$

e a_{int} denota a área interfacial por unidade de volume, dada por

$$a_{\text{int}} = \pi d^2 n_d \quad (4.60)$$

sendo que d e n_d , por sua vez, representam o diâmetro de uma gotícula de líquido e o número de gotículas por unidade de volume,

respectivamente. Note que este último pode ser expresso em função da fração volumétrica de líquido α_l e do volume ocupado por uma gotícula V_d , ou seja,

$$n_d = \frac{\alpha_l}{V_d} = \frac{6\alpha_l}{\pi d^3} \quad (4.61)$$

Assim, a partir das Equações (4.60) e (4.61), pode-se reescrever a Equação (4.58) como

$$Q_g^{\text{int}} = -\frac{6h_{\text{int}}}{d} \alpha_l \Delta T \quad (4.62)$$

ou então, introduzindo o coeficiente de troca térmica C_T , como

$$Q_g^{\text{int}} = -C_T \alpha_l \Delta T \quad (4.63)$$

Caso a fase contínua seja de líquido, pode-se demonstrar que

$$Q_g^{\text{int}} = -C_T \alpha_g \Delta T \quad (4.64)$$

Vale ainda salientar que, quanto maior o valor atribuído ao coeficiente de troca térmica (seja por um maior coeficiente de convecção ou por um menor comprimento característico da fase dispersa), maior também o transporte de energia entre as fases, e mais suas respectivas temperaturas tendem a um valor comum. Matematicamente, isto significa que, no limite do referido coeficiente tendendo a infinito e da diferença de temperatura tendendo a zero, o fluxo de calor interfacial observado é um número real finito. Constata-se, enfim, que por meio do ajuste do coeficiente de troca térmica, o modelo de não-equilíbrio é capaz de reproduzir condições muito próximas à de equilíbrio termodinâmico.

4.3.2.2 Modelo de equilíbrio

Para uma dada fase k , a temperatura T relaciona-se com a entropia s_k e a pressão P por

$$\delta T = \frac{T}{cP_k} \delta s_k + \frac{\beta_k T}{\rho_k cP_k} \delta P \quad (4.65)$$

Assim, partindo da Equação (4.65) e da condição de equilíbrio termodinâmico, pode-se expressar a entropia do líquido s_l em função da pressão P e da entropia do gás s_g , através da relação

$$\delta s_l = \frac{cp_l}{cp_g} \delta s_g + cp_l \left(\frac{\beta_g}{\rho_g cp_g} - \frac{\beta_l}{\rho_l cp_l} \right) \delta P \quad (4.66)$$

Caso se assuma que a fase contínua é gasosa, a substituição da Equação (4.66) em (4.17) fornece

$$\frac{\alpha_l \rho_l cp_l}{cp_g} \left(\frac{\partial s_g}{\partial t} + U \frac{\partial s_g}{\partial x} \right) + \alpha_l \rho_l cp_l \left(\frac{\beta_g}{\rho_g cp_g} - \frac{\beta_l}{\rho_l cp_l} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{Q_l^{\text{int}}}{T} \quad (4.67)$$

ou então,

$$\frac{\partial s_g}{\partial t} + U \frac{\partial s_g}{\partial x} = \frac{cp_g Q_l^{\text{int}}}{\alpha_l \rho_l cp_l T} - cp_g \left(\frac{\beta_g}{\rho_g cp_g} - \frac{\beta_l}{\rho_l cp_l} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial x} \right) \quad (4.68)$$

Reescrevendo agora a Equação (4.16),

$$\frac{\partial s_g}{\partial t} + U \frac{\partial s_g}{\partial x} = \frac{1}{\alpha_g \rho_g T} (Q_g^{\text{int}} + Q_g^w + F_g^w U) \quad (4.69)$$

Subtraindo a Equação (4.68) de (4.69), chega-se a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\alpha_g \rho_g cp_g} (Q_g^{\text{int}} + Q_g^w + F_g^w U) - \frac{Q_l^{\text{int}}}{\alpha_l \rho_l cp_l} + \\ & + \left(\frac{\beta_g T}{\rho_g cp_g} - \frac{\beta_l T}{\rho_l cp_l} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.70)$$

Desta maneira, o fluxo de calor interfacial Q_g^{int} que satisfaz a condição de equilíbrio pode ser calculado por

$$Q_g^{\text{int}} = -\frac{\alpha_l \rho_l cp_l}{\rho cp} \left[Q_g^w + F_g^w U + \alpha_g \rho_g cp_g \left(\frac{\beta_g T}{\rho_g cp_g} - \frac{\beta_l T}{\rho_l cp_l} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial x} \right) \right] \quad (4.71)$$

onde cp denota o calor específico a pressão constante da mistura, definido como

$$cp = \frac{\alpha_g \rho_g cp_g + \alpha_l \rho_l cp_l}{\rho} \quad (4.72)$$

Já no caso de a fase contínua ser a de líquido, a expressão do fluxo de calor passa a ser dada por

$$Q_g^{\text{int}} = \frac{\alpha_g \rho_g c p_g}{\rho c p} \left[Q_l^w + F_l^w U - \alpha_l \rho_l c p_l \left(\frac{\beta_g T}{\rho_g c p_g} - \frac{\beta_l T}{\rho_l c p_l} \right) \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U \frac{\partial P}{\partial x} \right) \right] \quad (4.73)$$

É importante destacar que as Equações (4.71) e (4.73), além de corroborarem a afirmação de que o fluxo de calor interfacial na condição de equilíbrio termodinâmico é um número real finito (e não necessariamente igual a zero), indicam ainda que o valor numérico deste pode ser determinado via equações de estado. Evidencia-se, assim, que tais expressões podem ser empregadas em substituição à equação de conservação da energia de uma das fases, conforme foi efetuado na seção 4.1.2.

4.4 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Conforme foi discutido nas seções 2.5.1.2 e 2.5.1.4, a discretização de um sistema de equações hiperbólicas resulta em um novo sistema, do tipo

$$\mathbf{A} \vec{X} = \vec{B} \quad (4.74)$$

Para o modelo homogêneo de não-equilíbrio, o emprego de um esquema de interpolação de segunda ordem equivale, na matriz de blocos \mathbf{A} , a 29 diagonais contendo elementos não nulos. Já para o caso do modelo de equilíbrio, este número é reduzido para 23. Mais uma vez, os sistemas lineares serão resolvidos pelo *solver* GBAND.

4.5 VALIDAÇÃO: TUBO DE CHOQUE BIFÁSICO

Se comparada ao problema monofásico, a solução do escoamento em um tubo de choque contendo duas fases é ainda mais trabalhosa. Isto ocorre devido ao maior número de equações de conservação envolvidas no fenômeno, bem como à existência de termos de acoplamento interfacial, que necessitam ser modelados. Mesmo assim, mediante as premissas de escoamento homogêneo e equilíbrio termodinâmico, o problema do tubo de choque bifásico pode ser resolvido analiticamente de maneira

iterativa, conforme apresentado por Städtke (2006) para uma dada configuração, que se reproduz a seguir.

4.5.1 Descrição do problema

O tubo de choque analisado por Städtke (2006) é composto novamente por duas câmaras separadas por um diafragma e dispostas na horizontal. As câmaras contêm uma dispersão de ar em água, em proporções distintas. Também diferem os patamares de pressão e temperatura aos quais as mesmas estão submetidas. Os demais detalhes do problema estão ilustrados na Figura 4.1.

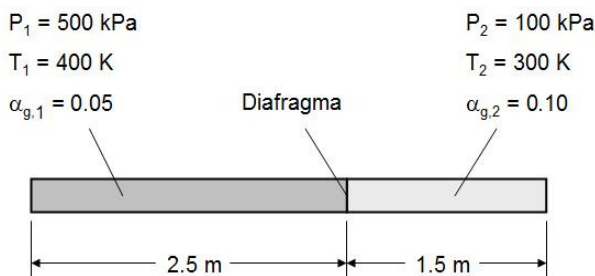


Figura 4.1 – Geometria e condições iniciais do problema.

4.5.2 Hipóteses adicionais e condições de contorno

Para o caso em estudo, dada a disposição das câmaras, a aceleração da gravidade não é relevante. Assumiu-se ainda que, para efeitos de comparação com a solução analítica do tubo de choque, a força de cisalhamento com a parede e o fluxo de calor que atravessa a mesma são nulos. Portanto,

$$g_x = 0 \quad (4.75)$$

$$F_l^w = 0 \quad (4.76)$$

$$Q_l^w = 0 \quad (4.77)$$

e o vetor termo-fonte \vec{C} na Equação (4.26) passa a ser função de Q_g^{int} , apenas.

As condições de contorno utilizadas na solução do problema são arroladas na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Condições de contorno do problema.

VARIÁVEL	CC À ESQUERDA	CC À DIREITA
P	$\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{G}_1^- \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = C_1$	$\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{G}_1^+ \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = C_1$
α_g	$\frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + \vec{G}_2^- \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = C_2$	$\frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + \vec{G}_2^+ \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = C_2$
U	$U = 0$	$U = 0$
s_g	$\frac{\partial s_g}{\partial t} + \vec{G}_4^- \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = C_4$	$\frac{\partial s_g}{\partial t} + \vec{G}_4^+ \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = C_4$
s_l	$\frac{\partial s_l}{\partial t} + \vec{G}_5^- \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = C_5$	$\frac{\partial s_l}{\partial t} + \vec{G}_5^+ \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = C_5$

4.5.3 Malha computacional e procedimento de solução

Discretizou-se as câmaras do tubo de choque em um total de 4001 nós, com espaçamento constante de $1mm$. O incremento de tempo utilizado, por sua vez, é igual a $5 \times 10^{-6} s$, e a simulação é encerrada em $t_{\max} = 15ms$. Dentro de um determinado passo de tempo, o procedimento de solução é o seguinte:

1. Assume-se que os campos são os mesmos obtidos no passo de tempo anterior.
2. Obtém-se o vetor \vec{B} que, devido às hipóteses simplificativas do problema, depende apenas de Q_g^{int} e das variáveis do passo de tempo anterior.
3. Calcula-se os autovalores em cada nó.
4. Determina-se os coeficientes de \mathbf{A} .
5. Resolve-se a Equação (4.74) via GBAND, de modo a se obter novos campos de P , α_g , U , s_g e, para o modelo de não-equilíbrio termodinâmico, s_l .
6. A partir dos campos atualizados de P , s_g e, para o caso supracitado, s_l , se determina as demais propriedades termodinâmicas em cada nó da malha computacional, por

meio de equações de estado para o gás (assumindo a hipótese de gás ideal) e para o líquido (fazendo uso das subrotinas que integram o código fonte do programa REFPROP 7.0 [Lemmon, McLinden e Huber, 2002], em linguagem FORTRAN).

7. Calcula-se Q_g^{int} para cada nó, através das Equações (4.63) ou (4.64) (modelo de equilíbrio), ou então, (4.71) ou (4.73) (não-equilíbrio).
8. Retorna-se ao item 2 até a convergência dos campos. O critério de convergência foi novamente estabelecido com base na diferença absoluta dos valores das variáveis entre duas iterações sucessivas. As tolerâncias aplicadas são mostradas na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Tolerâncias aplicadas na convergência dos campos.

VARIÁVEL	TOLERÂNCIA
P [Pa]	1×10^{-4}
α_g [-]	1×10^{-6}
U [m/s]	1×10^{-5}
s_g [J/kgK]	1×10^{-3}
s_l [J/kgK]	1×10^{-3}

4.5.4 Resultados

A seguir, nas Figuras 4.2 a 4.4, são comparados os resultados obtidos a partir do modelo de não-equilíbrio termodinâmico com a solução exata do problema.

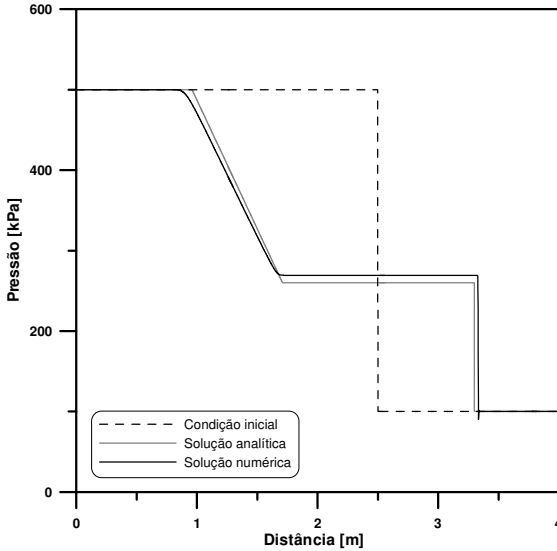


Figura 4.2 – Campos de pressão em $t = 15ms$. Comparação da solução analítica com os resultados obtidos pelo modelo homogêneo de não-equilíbrio para $C_T = 1 \times 10^9 W/m^3 K$.

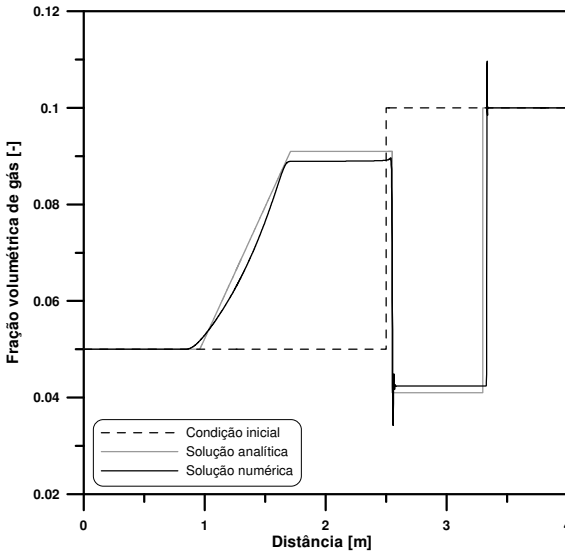


Figura 4.3 – Campos de fração volumétrica de gás em $t = 15ms$. Comparação da solução analítica com os resultados obtidos pelo modelo homogêneo de não-equilíbrio para $C_T = 1 \times 10^9 W/m^3 K$.

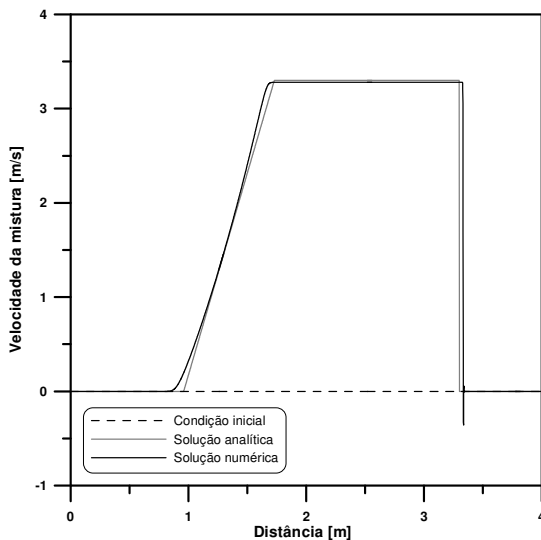


Figura 4.4 – Campos de velocidade da mistura em $t = 15ms$. Comparação da solução analítica com os resultados obtidos pelo modelo homogêneo de não-equilíbrio para $C_T = 1 \times 10^9 W/m^3 K$.

Os resultados para o modelo de equilíbrio são comparados com a solução analítica nas Figuras 4.5 a 4.7.

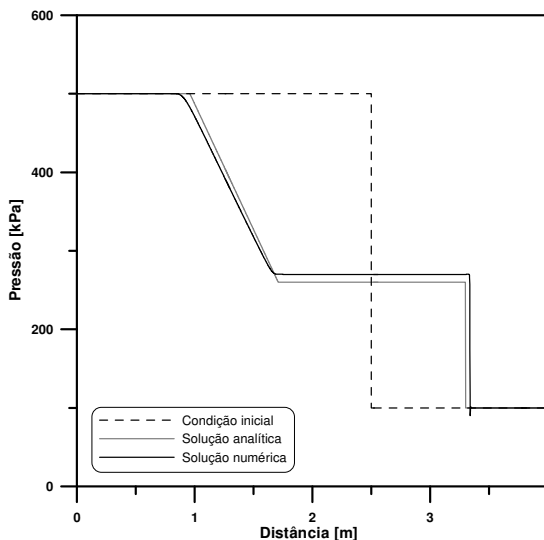


Figura 4.5 – Campos de pressão em $t = 15ms$. Comparação da solução analítica com os resultados obtidos pelo modelo homogêneo de equilíbrio.

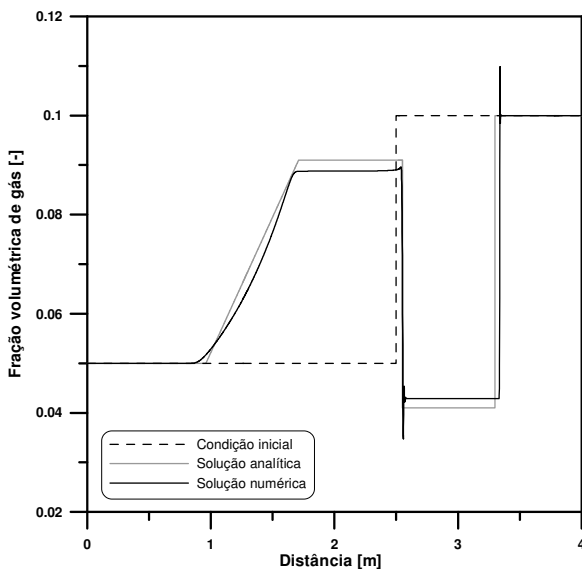


Figura 4.6 – Campos de fração volumétrica de gás em $t = 15ms$. Comparação da solução analítica com os resultados obtidos pelo modelo homogêneo de equilíbrio.

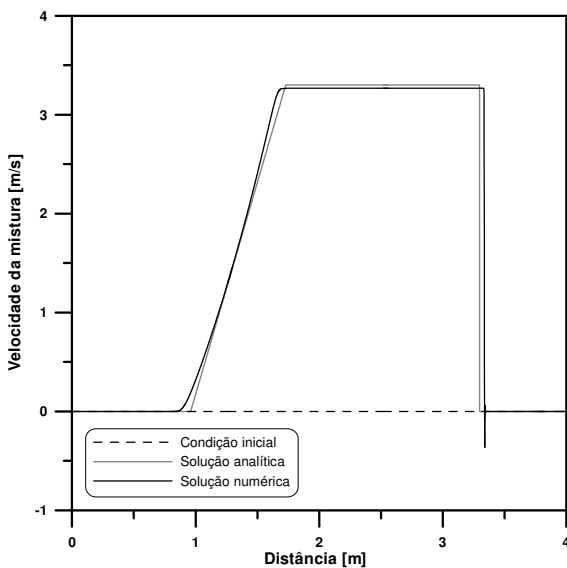


Figura 4.7 – Campos de velocidade da mistura em $t = 15ms$. Comparação da solução analítica com os resultados obtidos pelo modelo homogêneo de equilíbrio.

Os erros médios dos campos de pressão, fração volumétrica do gás e velocidade, para os dois modelos em questão, são detalhados na Tabela 4.4.

Tabela 4.4 – Erros médios absolutos dos resultados obtidos.

MODELO	ERRO MÉDIO		
	P [kPa]	α_g [-]	U [m/s]
Não-equilíbrio	7,4	0,0016	0,053
Equilíbrio	7,8	0,0018	0,061

Da análise das Figuras 4.2 a 4.7 e da Tabela 4.4, constata-se que os modelos homogêneos de não-equilíbrio e equilíbrio termodinâmico apresentaram resultados bastante similares, com ligeira superioridade do primeiro. Entretanto, durante a fase de obtenção de resultados deste, ficou claro que, ao se atribuir valores superiores a $1 \times 10^9 \text{ W/m}^3 \text{ K}$ para o coeficiente de troca térmica C_T , surgem instabilidades numéricas que dificultam ou até mesmo impossibilitam a solução do problema. Aconselha-se, nestes casos, que se opte pelo modelo de equilíbrio termodinâmico, por ter se mostrado mais robusto e mais eficiente no tocante ao tempo computacional.

Complementarmente, a Figura 4.8 ilustra a influência do coeficiente de troca térmica C_T sobre o campo de temperatura do gás.

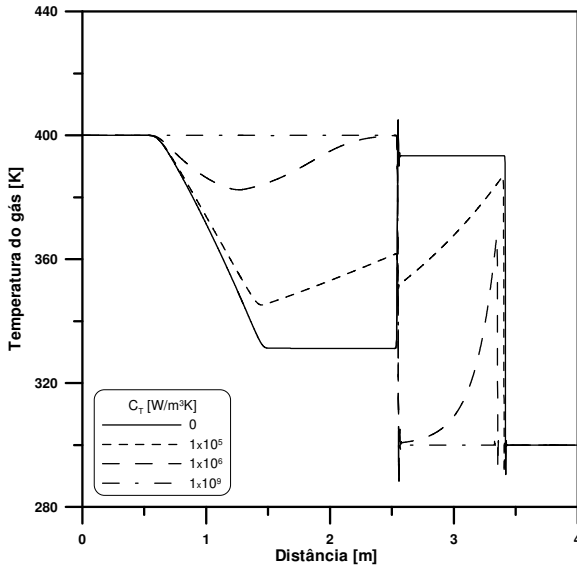


Figura 4.8 – Campos de temperatura do gás em $t = 15\text{ms}$. Comparação dos resultados obtidos pelo modelo homogêneo de não-equilíbrio para diferentes coeficientes de troca térmica.

Da Figura 4.8, nota-se que, quanto maior o acoplamento térmico entre as fases, menores são os efeitos da compressão e da expansão sobre a temperatura do gás.

4.6 VALIDAÇÃO: ESCOAMENTO ASCENDENTE EM DUTOS VERTICAIS

Os modelos homogêneos podem também ser empregados na solução de escoamentos bifásicos transientes em dutos verticais. Este cenário é encontrado em poços produtores de gás úmido, por exemplo, onde perturbações no escoamento são consequência geralmente de variações nas condições de operação dos equipamentos.

Com a solução deste problema, busca-se primeiramente comparar os autovalores da seção 4.2 com as velocidades de propagação efetivamente observadas. Adicionalmente, os resultados aqui levantados servirão como base na validação de um modelo não-homogêneo de escoamento, a ser desenvolvido no capítulo 5.

4.6.1 Descrição do problema

O problema em estudo está ilustrado na Figura 4.9.

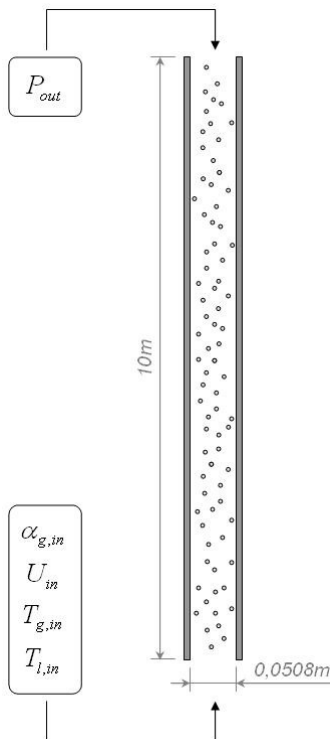


Figura 4.9 – Geometria e parâmetros de controle do problema.

Conforme pode ser visto na referida figura, trata-se de um duto de $10m$ de comprimento e $0,0508m$ ($2pol$) de diâmetro, disposto na vertical, pelo qual escoam uma dispersão de água em ar, no sentido ascendente. Na sua entrada, pode-se alterar a fração volumétrica de gás $\alpha_{g,in}$, a velocidade U_{in} e as temperaturas de gás $T_{g,in}$ e de líquido $T_{l,in}$ (uma vez que o modelo empregado é o de não-equilíbrio termodinâmico). Na saída do mesmo, é possível controlar a pressão P_{out} . O regime transiente é introduzido no escoamento através da variação destes parâmetros, um a um, sempre para uma mesma condição inicial.

4.6.2 Hipóteses adicionais e condições iniciais e de contorno

Para este caso, o fluxo de calor que atravessa a parede do duto foi novamente desprezado, de maneira que

$$Q_g^w = 0 \tag{4.78}$$

Adicionalmente, assumiu-se que as fases não trocam calor entre si, ou seja,

$$Q_g^{\text{int}} = Q_l^{\text{int}} = 0 \tag{4.79}$$

As condições de contorno empregadas estão listadas nas Tabelas 4.5 e 4.6.

Tabela 4.5 – Condições de contorno do problema.

VARIÁVEL	CC NA ENTRADA	CC NA SAÍDA
P	$\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{G}_1^- \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = C_1$	$P = P_{out}$
α_g	$\alpha_g = \alpha_{g,in}$	$\frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + \vec{G}_2^+ \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = C_2$
U	$U = U_{in}$	$\frac{\partial U}{\partial t} + \vec{G}_3^+ \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = C_3$
s_g	$s_g = s_g(T_{g,in}, P)$	$\frac{\partial s_g}{\partial t} + \vec{G}_4^+ \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = C_4$
s_l	$s_l = s_l(T_{l,in}, P)$	$\frac{\partial s_l}{\partial t} + \vec{G}_5^+ \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = C_5$

Tabela 4.6 – Parâmetros de controle.

PARÂMETRO	VALOR INICIAL	VALOR PERTURBADO
P_{out} [kPa]	500	480
$\alpha_{g,in}$ [-]	0,98	0,96
U_{in} [m/s]	15	20
$T_{g,in}$ [K]	300	350
$T_{l,in}$ [K]	300	350

Por sua vez, as condições iniciais do problema são obtidas através da solução do mesmo em regime permanente, para o conjunto de parâmetros listado na segunda coluna da Tabela 4.6.

4.6.3 Malha computacional e procedimento de solução

O duto vertical foi discretizado em 1001 nós igualmente espaçados de $10mm$. O incremento de tempo utilizado foi igual a $5 \times 10^{-5} s$, sendo que a simulação foi finalizada em $t_{\max} = 4,5s$. O procedimento de solução, bastante similar ao do problema abordado na seção 4.5, consiste, dentro de um determinado passo de tempo, das seguintes etapas:

1. Assume-se que os campos são os mesmos obtidos no passo de tempo anterior.
2. Determina-se o vetor \vec{B} .
3. Calcula-se os autovalores em cada nó.
4. Obtém-se os coeficientes de \mathbf{A} .
5. Resolve-se a Equação (4.74) via GBAND, de modo que novos campos de P , α_g , U , s_g e s_l sejam determinados.
6. A partir dos campos atualizados de P , s_g e s_l , se determina as demais propriedades termodinâmicas em cada nó da malha computacional, via equações de estado para o gás (assumindo a hipótese de gás ideal) e para o líquido (fazendo uso das subrotinas do programa REFPROP 7.0 [Lemmon, McLinden e Huber, 2002]).
7. Retorna-se ao item 2 até a convergência dos campos. O critério de convergência foi novamente estabelecido com base na diferença absoluta dos valores das variáveis entre duas iterações sucessivas. As tolerâncias aplicadas são as mesmas estabelecidas na seção 4.5.3.

4.6.4 Resultados

Os campos das variáveis que sofreram perturbação no contorno são ilustrados nas Figuras 4.10 a 4.14.

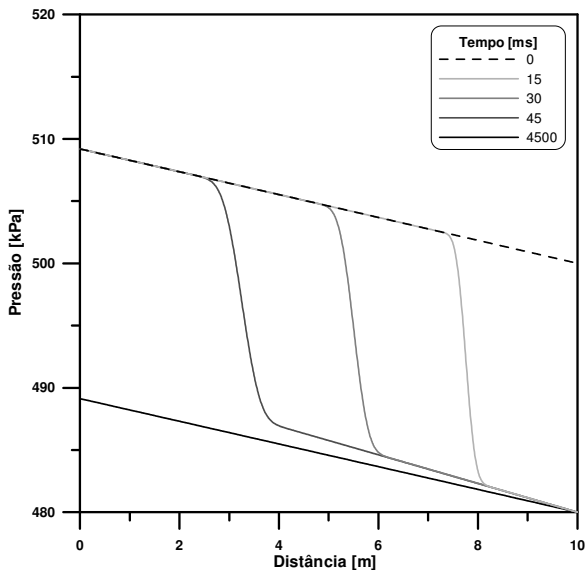


Figura 4.10 – Campos de pressão para diversos instantes de tempo simulados. Regime transiente introduzido pela variação da pressão na saída do duto.

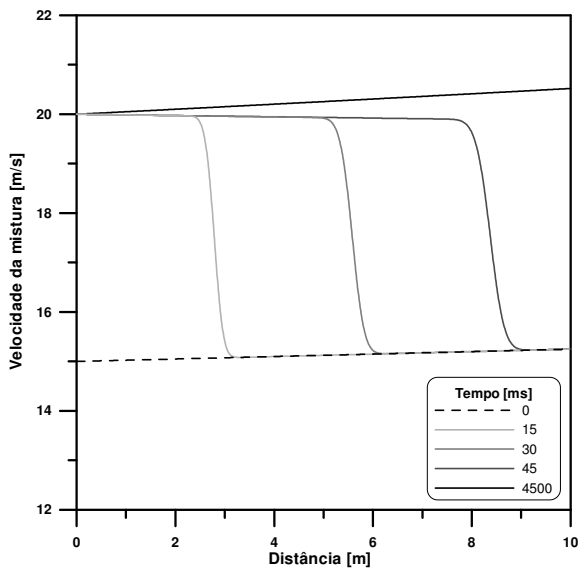


Figura 4.11 – Campos de velocidade da mistura para diversos instantes de tempo simulados. Regime transiente introduzido pela variação da velocidade da mistura na entrada do duto.

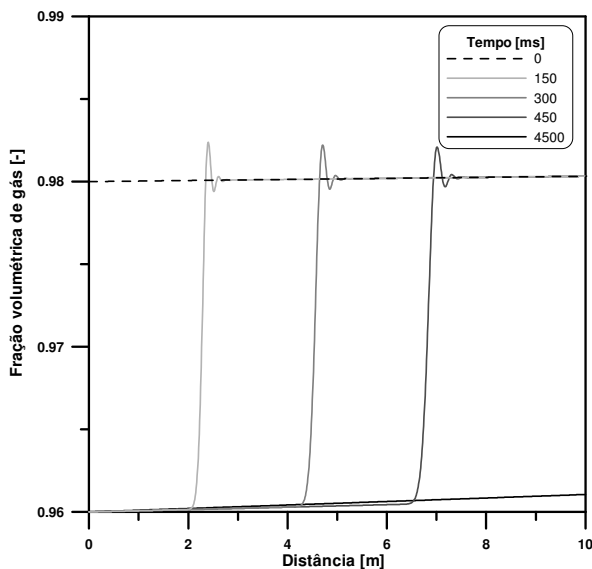


Figura 4.12 – Campos de fração volumétrica de gás para diversos instantes de tempo simulados. Regime transiente introduzido pela variação da fração volumétrica de gás na entrada do duto.

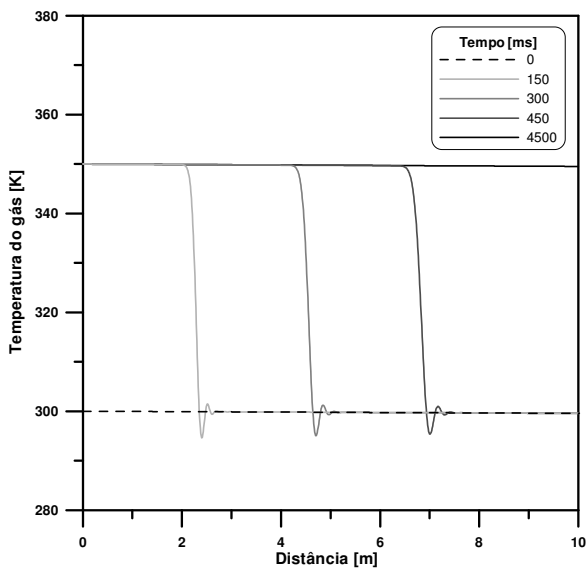


Figura 4.13 – Campos de temperatura do gás para diversos instantes de tempo simulados. Regime transiente introduzido pela variação da temperatura gás na entrada do duto.

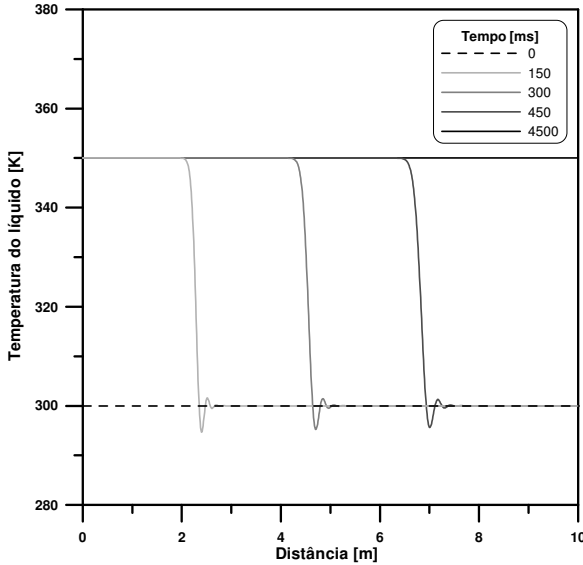


Figura 4.14 – Campos de temperatura do líquido para diversos instantes de tempo simulados. Regime transiente introduzido pela variação da temperatura líquido na entrada do duto.

As Figuras 4.10 a 4.14 sugerem que a propagação de descontinuidades de pressão e velocidade da mistura se dá em uma escala de tempo diferente das demais variáveis do escoamento (conferir a legenda das referidas figuras). De fato, as velocidades com as quais as informações do primeiro grupo são transportadas se aproximam da velocidade sônica na mistura, enquanto que as do segundo grupo são limitadas pelo transporte advectivo do escoamento.

As afirmações acima podem ser confirmadas através da comparação entre as velocidades médias de propagação observadas e as que seriam esperadas. Para o primeiro grupo (observadas), estas são extraídas diretamente das Figuras 4.10 a 4.14, dividindo-se o deslocamento “nariz a nariz” de uma perturbação em dois momentos distintos pelo intervalo de tempo que os separa, ou seja,

$$\bar{\lambda}_{obs,n} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1} \quad (4.80)$$

Já o segundo grupo de velocidades (esperadas) é calculado a partir dos valores iniciais do escoamento, dentro do intervalo de comprimento estabelecido anteriormente, através da expressão

$$\bar{\lambda}_{exp,n} = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{\int_{x(t_1)}^{x(t_2)} \frac{1}{\lambda_n} dx} \quad (4.81)$$

cuja integral é aproximada por um somatório. Os resultados são mostrados na Tabela 4.7.

Tabela 4.7 – Características do modelo: comparação entre os valores observados e os esperados.

AUTOVALOR	VARIÁVEIS ASSOCIADAS	VALOR OBSERVADO	VALOR ESPERADO
$\lambda_1 = U + a$	P, U	193,1	183,3
$\lambda_2 = U - a$	P, U	-158,6	-153,0
$\lambda_3 = U$	α_g	15,7	15,1
$\lambda_4 = U$	s_g	15,5	15,1
$\lambda_5 = U$	s_l	15,6	15,1

Verifica-se, na Tabela 4.7, que há uma boa concordância entre os valores comparados. Acredita-se que tal semelhança só não é maior por causa dos efeitos de difusão e dispersão numérica observados no modelo, que se propagam juntamente com a perturbação original e alteram os resultados da validação.

4.7 SUMÁRIO

Neste capítulo, foram apresentados modelos homogêneos de escoamento bifásico. Estes são válidos especialmente em situações onde as forças de arrasto interfacial são dominantes de tal forma que a velocidade relativa entre as fases líquida e gasosa possa ser desprezada.

Os modelos empregaram variáveis não-conservativas e foram formulados a partir das hipóteses de não-equilíbrio e equilíbrio termodinâmico, nesta ordem, cuja principal diferença residiu no tratamento do fluxo de calor interfacial. Ademais, o segundo modelo se mostrou equivalente ao primeiro reduzido da

quinta para a quarta ordem, dada a inexistência dos termos associados à equação de conservação da energia para a fase líquida. Ambos foram validados através do problema-teste do tubo de choque bifásico, que possui solução exata para as condições de escoamento homogêneo em equilíbrio, invíscido, adiabático e sem a presença de forças de corpo. Aplicou-se um esquema de interpolação de segunda ordem. Os resultados concordaram bem entre si e com a solução analítica.

O modelo de não-equilíbrio ainda foi empregado na solução de um escoamento ascendente em duto vertical, na intenção de se comparar suas velocidades de propagação de perturbações com suas características, além de se obter uma base de comparação para o modelo de dois fluidos a ser desenvolvido no capítulo seguinte. Novamente, verificou-se que os resultados são bastante similares, apesar de os efeitos de dispersão e difusão numérica do modelo dificultarem a comparação direta das duas grandezas.

5 ESCOAMENTO BIFÁSICO: MODELO DE DOIS FLUIDOS

Na solução de escoamentos bifásicos em determinados padrões, a diferença de velocidade entre as fases desempenha um importante papel. Para o arranjo anular vertical, por exemplo, a velocidade local da mistura na região central do duto pode ser até 10 vezes maior que a do filme de líquido na parte externa deste (Hewitt e Hall-Taylor, 1970). Logicamente, os modelos homogêneos desenvolvidos no capítulo anterior não são totalmente aplicáveis em casos deste tipo: um modelo de dois fluidos seria mais conveniente.

Partindo desta necessidade, Wallis (1969) estabeleceu um sistema de equações que trata a conservação da quantidade de movimento das fases separadamente. Sua solução, entretanto, é dificultada pela ocorrência de autovalores complexos (pois possuem uma parte imaginária), que evidenciam a não-hiperbolicidade do modelo e impossibilitam, assim, o emprego de métodos numéricos como o SCMM. Mesmo assim, tal sistema é a base de simuladores multifásicos comerciais, como o SPT Olga™. Este, por empregar volumes finitos e arranjo de malha desencontrado, introduz no escoamento uma parcela de difusão numérica que, embora indesejada em muitos casos, acaba por conferir boa estabilidade ao código computacional.

Posteriormente, Städtke (2006) associou a não-hiperbolicidade do modelo de Wallis (1969) ao uso de equações puramente algébricas na descrição das forças interfaciais: aliados à parcela viscosa já conhecida, devem ser considerados ainda termos de origem não-viscosa, todos expressos por meio de EDPs. A incorporação destes efeitos pelas equações de conservação da quantidade de movimento das fases leva a um novo sistema, com autovalores reais e autovetores linearmente independentes. É à descrição e validação deste modelo hiperbólico de dois fluidos que o presente capítulo se dedica.

Os assuntos serão trazidos na ordem que segue: a primeira parte da seção 5.1 repete o sistema de equações empregado por Wallis (1969), exceto pela menção às forças não-viscosas, que serão detalhadas em 5.1.1, e a partir das quais se obtém a forma final do sistema hiperbólico, em 5.1.2. Este terá suas características analisadas na seção 5.2. Em seguida, na seção 5.3, propõe-se um modelo para a força de arrasto de interfacial, no

caso específico do escoamento bifásico de gotículas de líquido em uma fase contínua gasosa. As propriedades do sistema de equações lineares são descritas de forma sucinta na seção 5.4. Já a seção 5.5 trata da validação do modelo que, da mesma maneira que no capítulo 4, se dará através da solução do problema do escoamento ascendente em um duto vertical. Enfim, na seção 5.6, são sumarizadas as principais atividades e conclusões do capítulo.

5.1 SISTEMA DE EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO

As equações de conservação da massa, quantidade de movimento e energia são dadas, na forma conservativa, por

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_g \rho_g U_g) = 0 \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_l \rho_l) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_l \rho_l U_l) = 0 \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g U_g) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_g \rho_g U_g^2) + \alpha_g \frac{\partial P}{\partial x} = F_g^{nv} + F_g^{\text{int}} - F_g^w - \alpha_g \rho_g g_x \quad (5.3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_l \rho_l U_l) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_l \rho_l U_l^2) + \alpha_l \frac{\partial P}{\partial x} = F_l^{nv} + F_l^{\text{int}} - F_l^w - \alpha_l \rho_l g_x \quad (5.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g s_g) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_g \rho_g U_g s_g) = \frac{1}{T_g} (Q_g^{\text{int}} + F_g^{\text{int}} \Delta U + Q_g^w + F_g^w U_g) \quad (5.5)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_l \rho_l s_l) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_l \rho_l U_l s_l) = \frac{1}{T_l} (Q_l^{\text{int}} + Q_l^w + F_l^w U_l) \quad (5.6)$$

onde F_k^{nv} denota as forças interfaciais não-viscosas por unidade de volume que atuam na fase k . Adicionalmente, tem-se que

$$F_l^{nv} = -F_g^{nv} \quad (5.7)$$

$$\Delta U = U_g - U_l \quad (5.8)$$

Seguindo um procedimento análogo ao descrito na seção 4.1.1, deduz-se que as Equações (5.1) a (5.6) podem ser expressas na forma não-conservativa como

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_g}{a_g^2} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U_g \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \rho_g \left(\frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + U_g \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} \right) + \\ & - \alpha_g \left(\frac{\rho_g \beta_g T_g}{c p_g} \right) \left(\frac{\partial s_g}{\partial t} + U_g \frac{\partial s_g}{\partial x} \right) + \alpha_g \rho_g \frac{\partial U_g}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (5.9)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_l}{a_l^2} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U_l \frac{\partial P}{\partial x} \right) - \rho_l \left(\frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + U_l \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} \right) + \\ & - \alpha_l \left(\frac{\rho_l \beta_l T_l}{c p_l} \right) \left(\frac{\partial s_l}{\partial t} + U_l \frac{\partial s_l}{\partial x} \right) + \alpha_l \rho_l \frac{\partial U_l}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\alpha_g \rho_g \left(\frac{\partial U_g}{\partial t} + U_g \frac{\partial U_g}{\partial x} \right) + \alpha_g \frac{\partial P}{\partial x} = F_g^{nv} + F_g^{\text{int}} - F_g^w - \alpha_g \rho_g g_x \quad (5.11)$$

$$\alpha_l \rho_l \left(\frac{\partial U_l}{\partial t} + U_l \frac{\partial U_l}{\partial x} \right) + \alpha_l \frac{\partial P}{\partial x} = F_l^{nv} + F_l^{\text{int}} - F_l^w - \alpha_l \rho_l g_x \quad (5.12)$$

$$\alpha_g \rho_g \left(\frac{\partial s_g}{\partial t} + U_g \frac{\partial s_g}{\partial x} \right) = \frac{1}{T_g} (Q_g^{\text{int}} + F_g^{\text{int}} \Delta U + Q_g^w + F_g^w U_g) \quad (5.13)$$

$$\alpha_l \rho_l \left(\frac{\partial s_l}{\partial t} + U_l \frac{\partial s_l}{\partial x} \right) = \frac{1}{T_l} (Q_l^{\text{int}} + Q_l^w + F_l^w U_l) \quad (5.14)$$

5.1.1 Modelagem das forças interfaciais não-viscosas

Neste ponto do trabalho, faz-se necessário quantificar a influência das forças de natureza não-viscosa sobre o sistema de equações de conservação, uma vez que as mesmas passarão a ser incorporadas pelas matrizes de coeficientes, com vistas à garantia da hiperbolicidade do modelo.

A modelagem descrita a seguir é abordada de maneira mais aprofundada por Städtke (2006). Nesta, assume-se que as forças interfaciais não-viscosas são originadas por três mecanismos distintos: massa virtual, diferença de pressão entre fases e interface e compressibilidade das fases. Logo, para a fase gasosa, tem-se que

$$F_g^{nv} = F_g^{vm} + F_g^{\Delta P} + F_g^{comp} \quad (5.15)$$

O efeito da massa virtual pode ser entendido como uma inércia extra à aceleração de uma das fases, imposta pela sua interação com a outra. Este termo é, portanto, dependente da proporção entre as fases, do seu arranjo macroscópico e também da variação de suas velocidades no espaço e no tempo. Städtke (2006) sugere uma expressão dada por

$$F_g^{vm} = -\alpha_g \alpha_l \rho \left[c_1 \left(\frac{\partial U_g}{\partial t} + U_l \frac{\partial U_g}{\partial x} - \frac{\partial U_l}{\partial t} - U_g \frac{\partial U_l}{\partial x} \right) + c_2 \Delta U \left(\frac{\partial U_g}{\partial x} - \frac{\partial U_l}{\partial x} \right) \right] \quad (5.16)$$

que contém adicionalmente os parâmetros de ajuste c_1 e c_2 . O autor salienta ainda que a incorporação apenas dos efeitos de massa virtual não garante a hiperbolicidade do modelo para todas as condições de escoamento.

O segundo termo leva em consideração os efeitos da diferença de pressão entre as fases e sua interface. Embora tal diferença esteja prevista nas formas mais generalistas das equações de conservação da quantidade de movimento, ela costuma ser desconsiderada em modelos de pressão única (*single pressure models*), como no caso dos desenvolvidos neste trabalho. Städtke (2006) afirma que, caso a mesma possa ser expressa através de equações algébricas, pode-se também quantificar seu efeito por meio de uma expressão da forma

$$F_g^{\Delta P} = -c_3 \alpha_g \alpha_l \rho (\Delta U)^2 \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} \quad (5.17)$$

onde c_3 representa novamente um parâmetro de ajuste.

Enfim, mesmo que ainda não completamente compreendido, o efeito da compressibilidade das fases é modelado por Städtke (2006) como sendo

$$F_g^{comp} = -\alpha_g \alpha_l \Delta U \left[c_4 \left(\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + U_g \frac{\partial \rho_g}{\partial x} \right) + c_5 \left(\frac{\partial \rho_l}{\partial t} + U_l \frac{\partial \rho_l}{\partial x} \right) \right] \quad (5.18)$$

onde c_4 e c_5 denotam novos parâmetros de ajuste.

Em seguida, o mesmo autor sugere que os parâmetros introduzidos nas Equações (5.16) a (5.18) sejam dados por

$$c_1 = k \quad (5.19)$$

$$c_2 = -\frac{\alpha_g \rho_l - \alpha_l \rho_g}{\rho} \quad (5.20)$$

$$c_3 = \frac{\rho_l + \rho_g}{\rho} \quad (5.21)$$

$$c_4 = \alpha_g \frac{\rho_l + \rho_g}{\rho_g} \quad (5.22)$$

$$c_5 = \alpha_l \frac{\rho_l + \rho_g}{\rho_l} \quad (5.23)$$

O coeficiente de massa virtual k , por sua vez, é empregado no ajuste do acoplamento interfacial da quantidade de movimento para os diferentes padrões de escoamento. Por exemplo, para o arranjo de gotas dispersas ou de bolhas, estima-se que valores em torno de $k = 0,5$ sejam os mais apropriados. Padrões com acoplamentos mais brandos refletem valores menores e, na condição de escoamento homogêneo, tem-se que $k \rightarrow \infty$.

Para a fase líquida, semelhantemente ao arrasto interfacial, a força de natureza não-viscosa é expressa como

$$F_l^{nv} = -F_g^{nv} \quad (5.24)$$

5.1.2 Forma final do sistema de equações

O vetor de incógnitas \vec{U} , formado pelas variáveis das equações de conservação, equivale a

$$\vec{U} = [P \quad \alpha_g \quad U_g \quad U_l \quad s_g \quad s_l]^T \quad (5.25)$$

estando este associado ao sistema de equações dado por

$$\mathbf{E} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \mathbf{F} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = \vec{C}^* \quad (5.26)$$

onde as matrizes \mathbf{E} e \mathbf{F} são dadas respectivamente por

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix}
\frac{\alpha_g}{a_g^2} & \rho_g & 0 & 0 \\
\frac{\alpha_l}{a_l^2} & -\rho_l & 0 & 0 \\
\frac{\alpha_g \alpha_l \Sigma \rho \Delta U}{\rho a_0^2} & 0 & \alpha_g (\rho_g + \alpha_l k \rho) & -\alpha_g \alpha_l k \rho \\
-\frac{\alpha_g \alpha_l \Sigma \rho \Delta U}{\rho a_0^2} & 0 & -\alpha_g \alpha_l k \rho & \alpha_l (\rho_l + \alpha_g k \rho) \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
-\alpha_g \left(\frac{\rho_g \beta_g T_g}{c p_g} \right) & & 0 & \\
0 & & -\alpha_l \left(\frac{\rho_l \beta_l T_l}{c p_l} \right) & \\
-\alpha_g^2 \alpha_l \Sigma \rho \Delta U \frac{\beta_g T_g}{c p_g} & & -\alpha_g \alpha_l^2 \Sigma \rho \Delta U \frac{\beta_l T_l}{c p_l} & \\
\alpha_g^2 \alpha_l \Sigma \rho \Delta U \frac{\beta_g T_g}{c p_g} & & \alpha_g \alpha_l^2 \Sigma \rho \Delta U \frac{\beta_l T_l}{c p_l} & \\
\alpha_g \rho_g & & 0 & \\
0 & & \alpha_l \rho_l &
\end{bmatrix} \quad (5.27)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_g U_g}{a_g^2} & \rho_g U_g & \alpha_g \rho_g \\ \frac{\alpha_l U_l}{a_l^2} & -\rho_l U_l & 0 \\ \alpha_g + \frac{\alpha_g \alpha_l U_a \Sigma \rho \Delta U}{\rho_l \rho_g} & \alpha_g \alpha_l \Sigma \rho (\Delta U)^2 & \begin{matrix} \alpha_g \rho_g U_g \\ + \alpha_g \alpha_l k \rho U_l \\ - \alpha_g \alpha_l \Delta \rho \Delta U \end{matrix} \\ \alpha_l - \frac{\alpha_g \alpha_l U_a \Sigma \rho \Delta U}{\rho_l \rho_g} & -\alpha_g \alpha_l \Sigma \rho (\Delta U)^2 & \begin{matrix} -\alpha_g \alpha_l k \rho U_l \\ + \alpha_g \alpha_l \Delta \rho \Delta U \end{matrix} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha_g U_g \left(\frac{\rho_g \beta_g T_g}{c p_g} \right) & 0 \\ \alpha_l \rho_l & 0 & -\alpha_l U_l \left(\frac{\rho_l \beta_l T_l}{c p_l} \right) \\ \begin{matrix} -\alpha_g \alpha_l k \rho U_g \\ + \alpha_g \alpha_l \Delta \rho \Delta U \end{matrix} & -\alpha_g^2 \alpha_l U_g \Sigma \rho \Delta U \frac{\beta_g T_g}{c p_g} & -\alpha_g \alpha_l^2 U_l \Sigma \rho \Delta U \frac{\beta_l T_l}{c p_l} \\ \begin{matrix} \alpha_l \rho_l U_l \\ + \alpha_g \alpha_l k \rho U_g \\ - \alpha_g \alpha_l \Delta \rho \Delta U \end{matrix} & \alpha_g^2 \alpha_l U_g \Sigma \rho \Delta U \frac{\beta_g T_g}{c p_g} & \alpha_g \alpha_l^2 U_l \Sigma \rho \Delta U \frac{\beta_l T_l}{c p_l} \\ 0 & \alpha_g \rho_g U_g & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_l U_l \left(\frac{\rho_l \beta_l T_l}{c p_l} \right) \end{bmatrix} \quad (5.28)$$

e o vetor termo-fonte \vec{C}^* , por

$$\vec{C}^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_g^{\text{int}} - F_g^w - \alpha_g \rho_g g_x \\ F_l^{\text{int}} - F_l^w - \alpha_l \rho_l g_x \\ \frac{1}{T_g} (Q_g^{\text{int}} + F_g^{\text{int}} \Delta U + Q_g^w + F_g^w U_g) \\ \frac{1}{T_l} (Q_l^{\text{int}} + Q_l^w + F_l^w U_l) \end{bmatrix} \quad (5.29)$$

As novas variáveis introduzidas são definidas como

$$\Sigma \rho = \rho_g + \rho_l \quad (5.30)$$

$$\Delta\rho = \alpha_l \rho_g - \alpha_g \rho_l \quad (5.31)$$

$$U_a = \frac{\alpha_g \rho_l U_g}{a_g^2} + \frac{\alpha_l \rho_g U_l}{a_l^2} \quad (5.32)$$

e

$$a_0 = \sqrt{\frac{\rho_g a_g^2 \rho_l a_l^2}{\rho(\alpha_g \rho_l a_l^2 + \alpha_l \rho_g a_g^2)}} \quad (5.33)$$

sendo esta última análoga à velocidade do som na mistura para o modelo homogêneo, conforme desenvolvido na seção 4.1.1.

O mesmo sistema pode ainda ser expresso como

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \mathbf{G} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = \vec{C} \quad (5.34)$$

onde

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} U_g - \frac{\alpha_l}{\rho_l a_l^2} \rho a_0^2 \Delta U & \rho a_0^2 \Delta U & \alpha_g \rho a_0^2 \\ \frac{\alpha_g}{\rho_g a_g^2} \frac{\alpha_l}{\rho_l a_l^2} \rho a_0^2 \Delta U & U_l + \frac{\alpha_l}{\rho_l a_l^2} \rho a_0^2 \Delta U & \frac{\alpha_l}{\rho_l a_l^2} \alpha_g \rho a_0^2 \\ \frac{\hat{\rho}_l}{\hat{\rho}^2} & 0 & \alpha_g \frac{\rho_g \hat{\rho}_l}{\hat{\rho}^2} U_g + \alpha_l \frac{\rho_l \hat{\rho}_g}{\hat{\rho}^2} U_l \\ \frac{\hat{\rho}_g}{\hat{\rho}^2} & 0 & \alpha_g \frac{\rho_g \hat{\rho}_g}{\hat{\rho}^2} \Delta U \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_l \rho a_0^2 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha_g}{\rho_g a_g^2} \alpha_l \rho a_0^2 & 0 & 0 \\ -\alpha_l \frac{\rho_l \hat{\rho}_l}{\hat{\rho}^2} \Delta U & 0 & 0 \\ \alpha_g \frac{\rho_g \hat{\rho}_l}{\hat{\rho}^2} U_g + \alpha_l \frac{\rho_l \hat{\rho}_g}{\hat{\rho}^2} U_l & 0 & 0 \\ 0 & U_g & 0 \\ 0 & 0 & U_l \end{bmatrix} \quad (5.35)$$

e

$$\bar{C} = \begin{bmatrix} \rho a_0^2 \left(\frac{\beta_g T_g}{\rho_g c p_g} S_g + \frac{\beta_l T_l}{\rho_l c p_l} S_l \right) \\ \rho a_0^2 \left(\frac{\alpha_l}{\rho_l a_l^2} \frac{\beta_g T_g}{\rho_g c p_g} S_g - \frac{\alpha_g}{\rho_g a_g^2} \frac{\beta_l T_l}{\rho_l c p_l} S_l \right) \\ \frac{1}{\alpha_g \hat{\rho}^2} [\rho_l (F_g^{\text{int}} - F_g^w) - \alpha_g k \rho (F_g^w + F_l^w)] - g_x \\ \frac{1}{\alpha_l \hat{\rho}^2} [\rho_g (F_l^{\text{int}} - F_l^w) - \alpha_l k \rho (F_g^w + F_l^w)] - g_x \\ \frac{S_g}{\alpha_g \rho_g} \\ \frac{S_l}{\alpha_l \rho_l} \end{bmatrix} \quad (5.36)$$

onde, por sua vez,

$$\hat{\rho}_g = \rho_g + k\rho \quad (5.37)$$

$$\hat{\rho}_l = \rho_l + k\rho \quad (5.38)$$

$$\hat{\rho} = \sqrt{\rho_g \rho_l + k\rho^2} \quad (5.39)$$

$$S_g = \frac{1}{T_g} (Q_g^{\text{int}} + F_g^{\text{int}} \Delta U + Q_g^w + F_g^w U_g) \quad (5.40)$$

$$S_l = \frac{1}{T_l} (Q_l^{\text{int}} + Q_l^w + F_l^w U_l) \quad (5.41)$$

5.2 ANÁLISE CARACTERÍSTICA

Na Tabela 5.1, encontram-se listados os autovalores e autovetores da matriz de coeficientes **G**.

Tabela 5.1 – Autovalores e autovetores da matriz de coeficientes.

AUTOVALOR	AUTOVETOR ASSOCIADO
$\lambda_1 = U + a$	$\vec{T}_1 = \begin{bmatrix} \hat{\rho}_s \rho a_0^2 & \alpha_g \alpha_l \rho a_0^2 \left(\frac{\hat{\rho}_l}{\rho_l a_l^2} - \frac{\hat{\rho}_g}{\rho_g a_g^2} \right) \\ \hat{\rho}_l \left(a - \alpha_l \frac{\rho_l \hat{\rho}_g}{\hat{\rho}^2} \Delta U \right) & \hat{\rho}_g \left(a + \alpha_g \frac{\rho_g \hat{\rho}_l}{\hat{\rho}^2} \Delta U \right) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$
$\lambda_2 = U - a$	$\vec{T}_2 = \begin{bmatrix} \hat{\rho}_s \rho a_0^2 & \alpha_g \alpha_l \rho a_0^2 \left(\frac{\hat{\rho}_l}{\rho_l a_l^2} - \frac{\hat{\rho}_g}{\rho_g a_g^2} \right) \\ \hat{\rho}_l \left(-a - \alpha_l \frac{\rho_l \hat{\rho}_g}{\hat{\rho}^2} \Delta U \right) & \hat{\rho}_g \left(-a + \alpha_g \frac{\rho_g \hat{\rho}_l}{\hat{\rho}^2} \Delta U \right) & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$
$\lambda_3 = U_g$	$\vec{T}_3 = \begin{bmatrix} \alpha_l \rho_l (\Delta U)^2 & -\alpha_l \left(1 - \alpha_l \left(\frac{\Delta U}{a_l} \right)^2 \right) & 0 & \Delta U & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$
$\lambda_4 = U_l$	$\vec{T}_4 = \begin{bmatrix} \alpha_g \rho_g (\Delta U)^2 & \alpha_g \left(1 - \alpha_g \left(\frac{\Delta U}{a_g} \right)^2 \right) & -\Delta U & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$
$\lambda_5 = U_g$	$\vec{T}_5 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0]^T$
$\lambda_6 = U_l$	$\vec{T}_6 = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^T$

A velocidade da mistura U e a sua velocidade de propagação do som a são definidas, respectivamente, como

$$U = \alpha_g \frac{\rho_g \hat{\rho}_l}{\hat{\rho}^2} U_g + \alpha_l \frac{\rho_l \hat{\rho}_g}{\hat{\rho}^2} U_l \quad (5.42)$$

e

$$a = \sqrt{\tilde{a}^2 - \Delta \tilde{a}^2} \quad (5.43)$$

onde

$$\tilde{a}^2 = \frac{\hat{\rho}_s}{\hat{\rho}^2} \rho a_0^2 \quad (5.44)$$

$$\Delta \tilde{a}^2 = \alpha_g \frac{\rho_g \hat{\rho}_l}{\hat{\rho}^2} \alpha_l \frac{\rho_l \hat{\rho}_g}{\hat{\rho}^2} (\Delta U)^2 \quad (5.45)$$

e, por conseguinte,

$$\hat{\rho}_s = \rho_s + k\rho \quad (5.46)$$

$$\rho_s = \alpha_g \rho_l + \alpha_l \rho_g \quad (5.47)$$

Logo, tem-se que a matriz diagonal de autovalores Λ equivale a

$$\Lambda = \begin{bmatrix} U + a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U - a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U_g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_l \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

e a matriz de transformação \mathbf{T} , a

$$\mathbf{T} = [\bar{T}_1 \quad \bar{T}_2 \quad \bar{T}_3 \quad \bar{T}_4 \quad \bar{T}_5 \quad \bar{T}_6] \quad (5.49)$$

de maneira que a matriz de coeficientes \mathbf{G} pode ser decomposta em

$$\mathbf{G}_1 = \varphi_1 \begin{bmatrix} \alpha_g \alpha_l \frac{\hat{\rho}^2 \tilde{a}^2}{\hat{\rho}_s} \left(\frac{\hat{\rho}_l}{\rho_l a_l^2} - \frac{\hat{\rho}_g}{\rho_g a_g^2} \right) \\ \hat{\rho}_l \left(a - \alpha_l \frac{\rho_l \hat{\rho}_g}{\hat{\rho}^2} \Delta U \right) \\ \hat{\rho}_g \left(a + \alpha_g \frac{\rho_g \hat{\rho}_l}{\hat{\rho}^2} \Delta U \right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \hat{\rho}_s + \hat{\rho} \Delta U \Delta a \\ \hat{\rho}^2 \tilde{a}^2 \Delta U \\ \alpha_g \hat{\rho}^2 \left(a_2^2 + a \frac{\rho_g \hat{\rho}_s}{\hat{\rho}^2} \Delta U \right) \\ \alpha_l \hat{\rho}^2 \left(a_1^2 - a \frac{\rho_l \hat{\rho}_s}{\hat{\rho}^2} \Delta U \right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \quad (5.50)$$

$$\mathbf{G}_2 = \varphi_2 \begin{bmatrix} \hat{\rho}^2 \tilde{a}^2 \\ \alpha_g \alpha_l \frac{\hat{\rho}^2 \tilde{a}^2}{\hat{\rho}_s} \left(\frac{\hat{\rho}_l}{\rho_l a_l^2} - \frac{\hat{\rho}_g}{\rho_g a_g^2} \right) \\ \hat{\rho}_l \left(-a - \alpha_l \frac{\rho_l \hat{\rho}_g}{\hat{\rho}^2} \Delta U \right) \\ \hat{\rho}_g \left(-a + \alpha_g \frac{\rho_g \hat{\rho}_l}{\hat{\rho}^2} \Delta U \right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -a \hat{\rho}_s + \hat{\rho} \Delta U \Delta a \\ \hat{\rho}^2 \tilde{a}^2 \Delta U \\ \alpha_g \hat{\rho}^2 \left(a_l^2 - a \frac{\rho_g \hat{\rho}_s}{\hat{\rho}^2} \Delta U \right) \\ \alpha_l \hat{\rho}^2 \left(a_l^2 + a \frac{\rho_l \hat{\rho}_s}{\hat{\rho}^2} \Delta U \right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \quad (5.51)$$

$$\mathbf{G}_3 = \varphi_3 \begin{bmatrix} \alpha_l \rho_l (\Delta U)^2 \\ -\alpha_l \left(1 - \alpha_l \left(\frac{\Delta U}{a_l} \right)^2 \right) \\ 0 \\ \Delta U \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\alpha_g \Delta U}{a_g^2} & \rho_g \Delta U & \alpha_g \rho_g & -\alpha_g \frac{\rho_g \hat{\rho}_l}{\hat{\rho}_g} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

$$\mathbf{G}_4 = \varphi_4 \begin{bmatrix} \alpha_g \rho_g (\Delta U)^2 \\ \alpha_g \left(1 - \alpha_g \left(\frac{\Delta U}{a_g} \right)^2 \right) \\ -\Delta U \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\alpha_l \Delta U}{a_l^2} & -\rho_l \Delta U & \alpha_l \frac{\rho_l \hat{\rho}_g}{\hat{\rho}_l} & -\alpha_l \rho_l & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

$$\mathbf{G}_5 = U_g \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

$$\mathbf{G}_6 = U_l \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

onde

$$\varphi_1 = (U + a) \frac{\tilde{a}^2 + a\Delta U \Delta \alpha - 2\Delta a^2}{2a\hat{\rho}_s \hat{\rho}^2 a_3^2 a_4^2} \quad (5.56)$$

$$\varphi_2 = -(U - a) \frac{\tilde{a}^2 - a\Delta U \Delta \alpha - 2\Delta a^2}{2a\hat{\rho}_s \hat{\rho}^2 a_3^2 a_4^2} \quad (5.57)$$

$$\varphi_3 = -\frac{U_g}{\rho_g \Delta U \left[\frac{\hat{\rho}_s}{\hat{\rho}_g} - \frac{\alpha_l \rho_l (\Delta U)^2}{\rho a_0^2} \right]} \quad (5.58)$$

$$\varphi_4 = -\frac{U_l}{\rho_l \Delta U \left[\frac{\hat{\rho}_s}{\hat{\rho}_l} - \frac{\alpha_g \rho_g (\Delta U)^2}{\rho a_0^2} \right]} \quad (5.59)$$

e

$$a_1^2 = a^2 - \rho_g \rho_l \left(\frac{\alpha_g \hat{\rho}_l \Delta U}{\hat{\rho}^2} \right)^2 \quad (5.60)$$

$$a_2^2 = a^2 - \rho_g \rho_l \left(\frac{\alpha_l \hat{\rho}_g \Delta U}{\hat{\rho}^2} \right)^2 \quad (5.61)$$

$$a_3^2 = \tilde{a}^2 - \alpha_l \frac{\rho_l \hat{\rho}_g}{\hat{\rho}^2} (\Delta U)^2 \quad (5.62)$$

$$a_4^2 = \tilde{a}^2 - \alpha_g \frac{\rho_g \hat{\rho}_l}{\hat{\rho}^2} (\Delta U)^2 \quad (5.63)$$

$$\Delta a = \frac{\hat{\rho}_l}{\hat{\rho}} \left(\frac{\alpha_g \tilde{a}}{a_g} \right)^2 - \frac{\hat{\rho}_g}{\hat{\rho}} \left(\frac{\alpha_l \tilde{a}}{a_l} \right)^2 \quad (5.64)$$

$$\Delta \alpha = \alpha_l \frac{\rho_l \hat{\rho}_g}{\hat{\rho}^2} - \alpha_g \frac{\rho_g \hat{\rho}_l}{\hat{\rho}^2} \quad (5.65)$$

Somando as matrizes associadas a autovalores de mesmo sinal, chega-se a

$$\mathbf{G}^+ = \mathbf{G}_1 + \frac{U_g + |U_g|}{2U_g} (\mathbf{G}_3 + \mathbf{G}_5) + \frac{U_l + |U_l|}{2U_l} (\mathbf{G}_4 + \mathbf{G}_6) \quad (5.66)$$

$$\mathbf{G}^- = \mathbf{G}_2 + \frac{U_g - |U_g|}{2U_g} (\mathbf{G}_3 + \mathbf{G}_5) + \frac{U_l - |U_l|}{2U_l} (\mathbf{G}_4 + \mathbf{G}_6) \quad (5.67)$$

A Equação (5.34), portanto, pode ser reescrita como

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \mathbf{G}^+ \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + \mathbf{G}^- \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = \vec{C} \quad (5.68)$$

5.3 MODELAGEM DA FORÇA DE ARRASTO INTERFACIAL

Mencionou-se anteriormente que a força de arrasto interfacial será abordada para o caso particular do escoamento bifásico de gotículas de líquido em uma fase contínua gasosa, já que se assumiu tal arranjo durante a etapa de validação do modelo (ver seção 5.5). Assim, tem-se que

$$F_g^{\text{int}} = -\frac{1}{2} \rho_g C_D \frac{\pi d^2}{4} \Delta U |\Delta U| n_d \quad (5.69)$$

onde

$$n_d = \frac{\alpha_l}{V_d} = \frac{6\alpha_l}{\pi d^3} \quad (5.70)$$

Portanto, da substituição da Equação (5.70) em (5.69), resulta

$$F_g^{\text{int}} = -\frac{3\alpha_l}{4d} \rho_g C_D |\Delta U| \Delta U \quad (5.71)$$

O coeficiente de arrasto C_D , por sua vez, pode ser expresso através da equação proposta por Chow (1980),

$$C_D = \begin{cases} \frac{24}{\text{Re}_d} & \text{Re}_d \leq 1 \\ \frac{24}{\text{Re}_d^{0,646}} & 1 < \text{Re}_d \leq 400 \\ 0,5 & 400 < \text{Re}_d \leq 3 \times 10^5 \\ 3,66 \times 10^{-4} \text{Re}_d^{0,4275} & 3 \times 10^5 < \text{Re}_d \leq 2 \times 10^6 \\ 0,18 & \text{Re}_d > 2 \times 10^6 \end{cases} \quad (5.72)$$

onde o número de Reynolds das gotículas Re_d é definido como

$$\text{Re}_d = \frac{\rho_g \Delta U d}{\mu_g} \quad (5.73)$$

Verificando as Equações (5.71) a (5.73), constata-se que o modelo da força de arrasto interfacial aqui desenvolvido é inversamente proporcional ao comprimento característico da parcela líquida por uma potência que pode variar de 0,5725 a 2. Desta maneira, é de se esperar que, à medida que se reduz o valor deste último, o escoamento cada vez mais se aproxime do observado no padrão de névoa, descrito no capítulo 4, não apenas pela semelhança visual, mas também pelo aumento do acoplamento mecânico entre as fases, com a conseqüente redução de sua velocidade relativa.

Por último, vale lembrar que, pela terceira lei de Newton,

$$F_l^{\text{int}} = -F_g^{\text{int}} \quad (5.74)$$

5.4 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

Foi visto nas seções 2.5.1.2 e 2.5.1.4 que a discretização de um sistema de equações hiperbólicas resulta em um novo sistema, da forma

$$\mathbf{A}\vec{X} = \vec{B} \quad (5.75)$$

Para o caso em análise, a adoção de um esquema de interpolação de segunda ordem resultou, na matriz de blocos \mathbf{A} , em 35 diagonais contendo elementos não nulos. O sistema linear será novamente resolvido através do *solver* GBAND.

5.5 VALIDAÇÃO: ESCOAMENTO ASCENDENTE EM DUTOS VERTICAIS

A solução de escoamentos bifásicos transientes em dutos verticais já foi proposta na seção 4.6, quando da validação do modelo homogêneo de não-equilíbrio. Conforme lá mencionado, a introdução de perturbações no contorno deste problema nos permite comparar suas velocidades de propagação com os autovalores do sistema de equações de conservação, neste caso listados na seção 5.2. Ainda, caso o modelo de dois fluidos seja levado à condição de escoamento em névoa (através do emprego de diâmetros de gotícula suficientemente pequenos), o mesmo pode ser comparado de maneira direta com o desenvolvido no capítulo anterior.

5.5.1 Descrição do problema

O problema em estudo foi detalhado na seção 4.6.1. Para o modelo de dois fluidos, apenas substituiu-se a velocidade da mistura na entrada do duto U_{in} pelas velocidades das respectivas fases, $U_{g,in}$ e $U_{l,in}$. A Figura 5.1 ilustra novamente a geometria do problema, bem como seus parâmetros de controle.

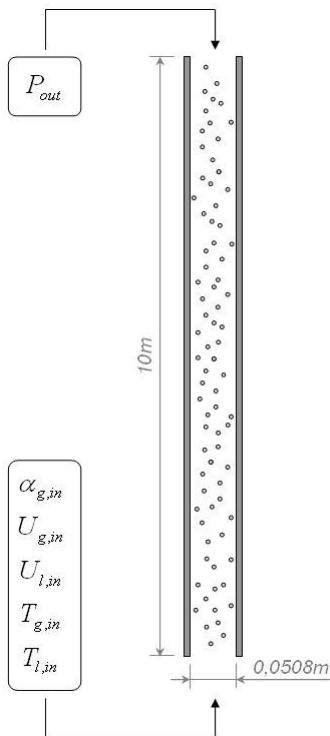


Figura 5.1 – Geometria e parâmetros de controle do problema.

5.5.2 Hipóteses adicionais e condições iniciais e de contorno

Mais uma vez, desprezou-se o fluxo de calor que atravessa a parede do duto, de maneira que

$$Q_g^w = 0 \quad (5.76)$$

Ainda, assumiu-se que as fases não trocam calor entre si, ou seja,

$$Q_g^{\text{int}} = Q_l^{\text{int}} = 0 \quad (5.77)$$

Atribuiu-se ao modelo um diâmetro de gota igual a $1 \times 10^{-5} m$. Com isso, espera-se que as forças viscosas de arrasto minimizem a velocidade relativa entre as fases, aproximando o

escoamento da condição-limite de fluxo homogêneo. O coeficiente de massa virtual k será abordado mais tarde, na seção 5.5.4.

As condições de contorno empregadas, por sua vez, constam nas Tabelas 5.2 e 5.3.

Tabela 5.2 – Condições de contorno do problema.

VARIÁVEL	CC NA ENTRADA	CC NA SAÍDA
P	$\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{G}_1^- \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = C_1$	$P = P_{out}$
α_g	$\alpha_g = \alpha_{g,in}$	$\frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + \vec{G}_2^+ \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = C_2$
U_g	$U_g = U_{g,in}$	$\frac{\partial U_g}{\partial t} + \vec{G}_3^+ \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = C_3$
U_l	$U_l = U_{l,in}$	$\frac{\partial U_l}{\partial t} + \vec{G}_4^+ \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = C_4$
s_g	$s_g = s_g(T_{g,in}, P)$	$\frac{\partial s_g}{\partial t} + \vec{G}_5^+ \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = C_5$
s_l	$s_l = s_l(T_{l,in}, P)$	$\frac{\partial s_l}{\partial t} + \vec{G}_6^+ \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = C_6$

Tabela 5.3 – Parâmetros de controle.

PARÂMETRO	VALOR INICIAL	VALOR PERTURBADO
P_{out} [kPa]	500	480
$\alpha_{g,in}$ [-]	0,98	0,96
$U_{g,in}$ [m/s]	15	20
$U_{l,in}$ [m/s]	15	20
$T_{g,in}$ [K]	300	350
$T_{l,in}$ [K]	300	350

Quanto às condições iniciais do problema, estas correspondem à solução do mesmo em regime permanente e para o conjunto de parâmetros listado na segunda coluna da Tabela 5.3.

5.5.3 Malha computacional e procedimento de solução

Discretizou-se o duto vertical em 1001 nós espaçados de 10mm . O incremento de tempo utilizado foi igual a $5 \times 10^{-5} \text{s}$, e a simulação foi encerrada em $t_{\text{max}} = 4,5 \text{s}$. O procedimento de solução, para um determinado passo de tempo, é o seguinte:

1. Assume-se que os campos são os mesmos obtidos no passo de tempo anterior.
2. Obtém-se o vetor termo-fonte \vec{B} .
3. Calcula-se os autovalores em cada nó.
4. Determina-se os coeficientes de \mathbf{A} .
5. Resolve-se a Equação (5.75) via GBAND, de maneira a se obter novos campos de P , α_g , U_g , U_l , s_g e s_l .
6. A partir dos campos atualizados de P , s_g e s_l , se determina as demais propriedades termodinâmicas em cada nó da malha computacional, por meio de equações de estado para o gás (novamente assumindo a hipótese de gás ideal) e para o líquido (mais uma vez fazendo uso das subrotinas do programa REFPROP 7.0 [Lemmon, McLinden e Huber, 2002]).
7. Retorna-se ao item 2 até a convergência dos campos. As tolerâncias aplicadas, baseadas na diferença absoluta das variáveis entre iterações sucessivas, se encontram na Tabela 5.4.

Tabela 5.4 – Tolerâncias aplicadas na convergência dos campos.

VARIÁVEL	TOLERÂNCIA
P [Pa]	1×10^{-4}
α_g [-]	1×10^{-6}
U_g [m/s]	1×10^{-5}
U_l [m/s]	1×10^{-5}
s_g [J/kgK]	1×10^{-3}
s_l [J/kgK]	1×10^{-3}

5.5.4 Resultados

Os principais campos obtidos constam nas Figuras 5.2 a 5.7.

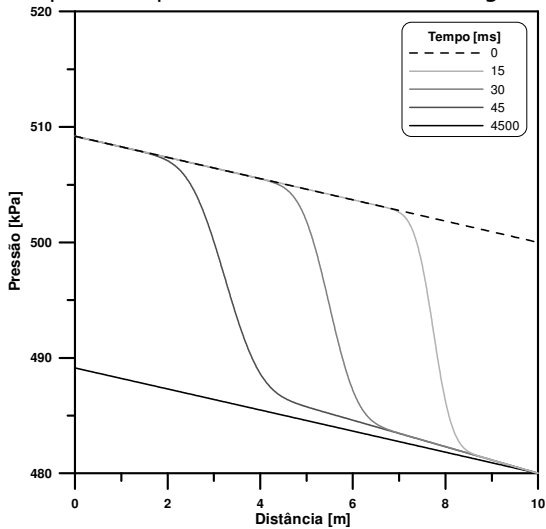


Figura 5.2 – Campos de pressão para diversos instantes de tempo simulados. Regime transiente introduzido pela variação da pressão na saída do duto.

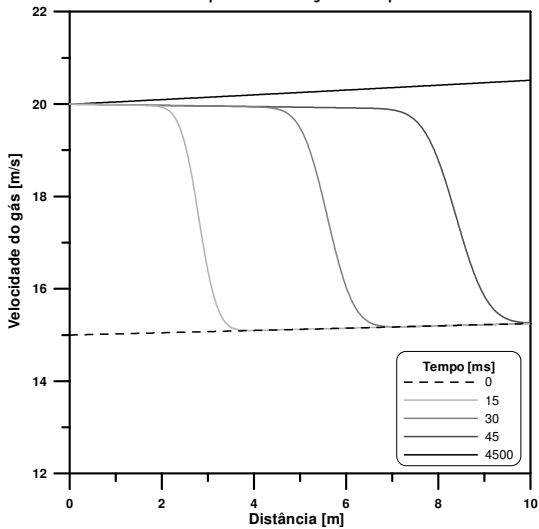


Figura 5.3 – Campos de velocidade do gás para diversos instantes de tempo simulados. Regime transiente introduzido pela variação da velocidade do gás e do líquido na entrada do duto.

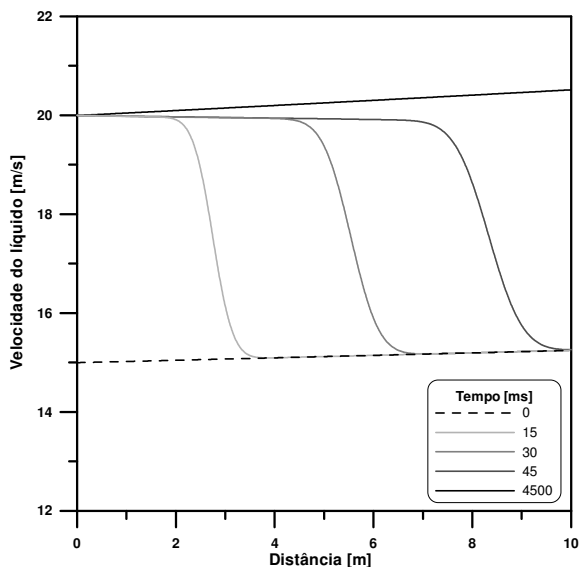


Figura 5.4 – Campos de velocidade do líquido para diversos instantes de tempo simulados. Regime transiente introduzido pela variação da velocidade do gás e do líquido na entrada do duto.

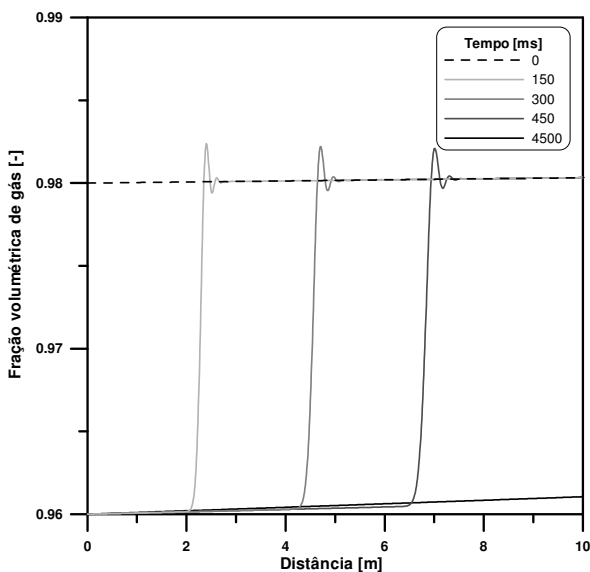


Figura 5.5 – Campos de fração volumétrica de gás para diversos instantes de tempo simulados. Regime transiente introduzido pela variação da fração volumétrica de gás na entrada do duto.

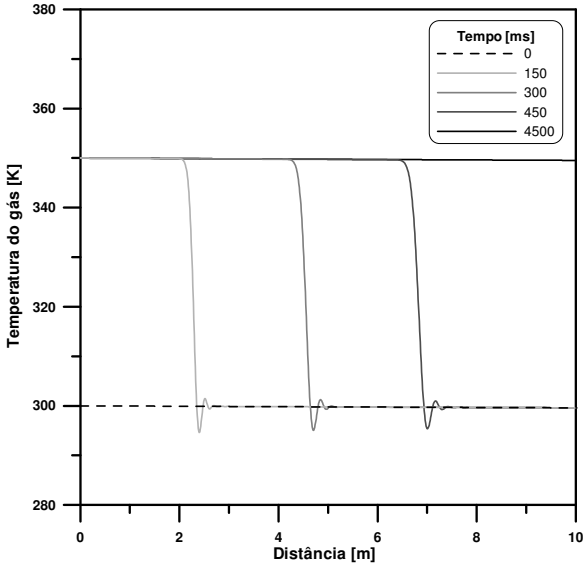


Figura 5.6 – Campos de temperatura do gás para diversos instantes de tempo simulados. Regime transiente introduzido pela variação da temperatura do gás na entrada do duto.

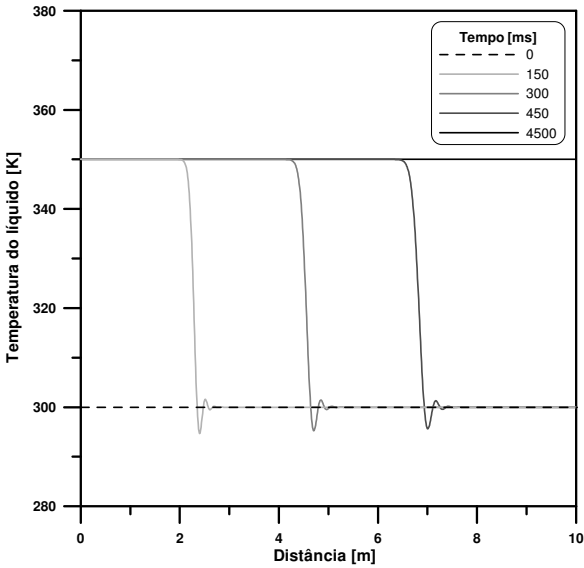


Figura 5.7 – Campos de temperatura do líquido para diversos instantes de tempo simulados. Regime transiente introduzido pela variação da temperatura do líquido na entrada do duto.

Pode-se perceber nestas figuras que, a exemplo da validação realizada na seção 4.6, as velocidades de propagação das variáveis P , U_g e U_l são de uma ordem de grandeza superior às observadas para α_g , s_g e s_l . Analisando mais precisamente as Figuras 5.3 e 5.4, vê-se que o diâmetro de gota adotado realmente tornou desprezível a diferença de velocidade entre as fases, de sorte que os resultados obtidos nesta seção podem ser comparados com os levantados para o modelo homogêneo de não-equilíbrio termodinâmico, na seção 4.6.4. É desejável, portanto, que o modelo de dois fluidos apresente velocidades médias de propagação semelhantes às observadas neste. Estes dois grupos de valores, calculados pela Equação (4.80) podem ainda ser confrontados com as velocidades que seriam esperadas, de acordo com a Equação (4.81). Tal comparação é feita na Tabela 5.5.

Tabela 5.5 – Velocidades de propagação: comparação entre os valores observados e os esperados.

VELOCIDADE DE PROPAGAÇÃO	VALOR OBSERVADO		VALOR ESPERADO
	Dois fluidos	Homogêneo	
$U + a$	201,7	193,1	183,3
$U - a$	-170,1	-158,6	-153,0
U_g	15,5	15,6	15,1
U_l	15,6	15,6	15,1

Da Tabela 5.5, constata-se que os resultados numéricos concordam bem entre si e com os valores esperados.

O coeficiente de massa virtual k , por sua vez, sabidamente influencia o cálculo da velocidade do som na mistura, descrita pela Equação (5.43). Tal dependência é ilustrada na Figura 5.8, para os valores dos demais parâmetros necessários para o seu cômputo tomados na entrada do duto.

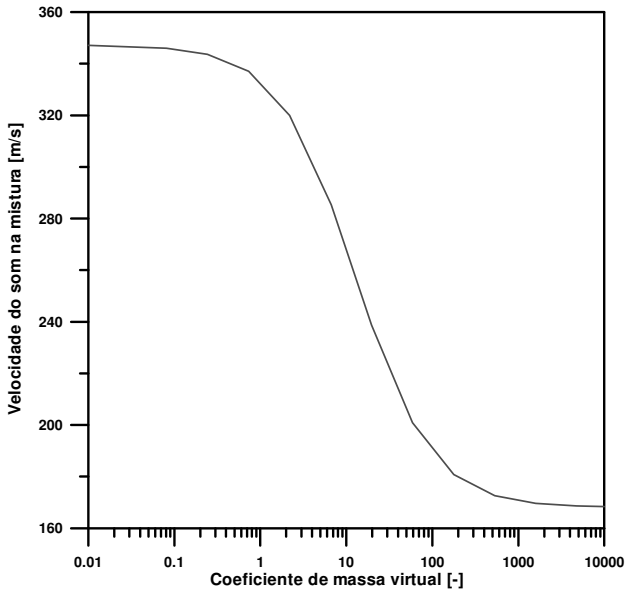


Figura 5.8 – Velocidade do som na mistura em função do coeficiente de massa virtual. Valores baseados nas propriedades na entrada do duto.

Entretanto, se confrontados com as velocidades efetivamente observadas, verifica-se que estes valores não se confirmam na prática: pelo contrário, parecem não interferir na solução do escoamento, conforme mostra a Tabela 5.6.

Tabela 5.6 – Velocidades de propagação: comparação entre os valores observados e os esperados.

MODELO	VELOCIDADE DO SOM [m/s]	
	Valor observado	Valor esperado
Dois fluidos ($k = 0$)	185,9	347,2
Dois fluidos ($k = 10$)	185,9	267,8
Dois fluidos ($k = 1 \times 10^5$)	185,9	168,2
Homogêneo	175,9	168,1

Tal fato, agravado ainda pela ausência de resultados experimentais que expressem o coeficiente k em função das propriedades do escoamento, bem como pelo grande esforço

algébrico que a não-nulidade deste adiciona na etapa de decomposição da matriz de coeficientes (e que não é requisito para a garantia de hiperbolicidade do modelo), representa um desestímulo para a inclusão dos efeitos de massa virtual em modelos futuros que lidem com escoamentos envolvendo a dispersão da fase líquida na fase gasosa sob a forma de pequenas gotículas, como é o caso do escoamento anular. É por isso que, no capítulo 6, tal mecanismo passará a ser desprezado. Entretanto, sabe-se que o efeito de massa virtual é de extrema relevância para outras configurações de escoamento bifásico em regime transiente não abordadas no presente trabalho (Geurst, 1985).

5.6 SUMÁRIO

Neste capítulo, foi desenvolvido um modelo transiente de dois fluidos. Embora possa ser empregado na solução de escoamentos bifásicos de padrões diversos, viu-se que este é especialmente apropriado para arranjos onde a diferença de velocidade entre as fases é expressiva e relevante, de modo a restringir a aplicabilidade dos modelos homogêneos (como no escoamento vertical anular, por exemplo).

O modelo foi formulado a partir da condição de não-equilíbrio termodinâmico, utilizando variáveis não-conservativas. Especial atenção teve de ser dada às forças interfaciais que se somam às de origem viscosa e aos mecanismos que as originam: massa virtual, diferença de pressão entre fases e interface e compressibilidade das fases. Estas foram expressas por meio de EDPs e incorporadas pela matriz de coeficientes, a fim de garantir a hiperbolicidade do sistema de equações e permitir, portanto, a aplicação do SCMM.

A exemplo do capítulo anterior, a validação se deu através do problema-teste do escoamento ascendente em um duto vertical. O modelo (que empregou um esquema de interpolação de segunda ordem, diga-se) foi levado à condição de escoamento em névoa, através da adoção de um diâmetro de partícula reduzido, de maneira que os resultados puderam ser comparados diretamente, apresentando boa concordância. Constatou-se ainda que, para o caso analisado, os valores atribuídos ao coeficiente de massa virtual k não tiveram influência sobre a simulação. Mesmo

que isto talvez não fosse verificado em outras situações, a ausência de resultados experimentais que expressem tal coeficiente em função das propriedades do escoamento, aliada ao esforço algébrico que a não-nulidade deste adiciona na etapa de decomposição da matriz de coeficientes, mostraram que a sua inclusão não representa um ganho significativo. Conseqüentemente, tal mecanismo passará a ser desprezado no capítulo seguinte.

6 ESCOAMENTO BIFÁSICO DE PADRÃO ANULAR

Neste capítulo, o modelo de dois fluidos proposto por Städtke (2006) será aplicado na solução de escoamentos bifásicos de padrão anular. Tal arranjo é geralmente o que preenche o maior trecho da coluna de produção em poços verticais de gás úmido, dados os valores de velocidade superficial que são impostos à fase gasosa nestes casos. Isto ocorre não somente pelas elevadas vazões de produção (que chegam à ordem de $1 \times 10^6 \text{ m}^3 / d$ em condições-básicas), mas também por limitações ao diâmetro da coluna, uma vez que valores superiores a 6 pol ($0,1524 \text{ m}$) dificilmente seriam comportados por um poço convencional. Logicamente, também outros padrões podem ser observados em determinados trechos do escoamento (como na parte mais a montante da coluna de produção) ou em certos instantes de tempo (após mudanças nas condições operacionais do poço, por exemplo).

Os assuntos foram organizados da seguinte forma: na seção 6.1, faz-se uma descrição sucinta do padrão de escoamento em análise, já enumerando os mecanismos de transporte intrínsecos do arranjo. Estes serão consolidados na seção 6.2, juntamente com os demais termos das respectivas equações de conservação. Ainda nesta parte do trabalho, faz-se a modelagem das forças interfaciais de origem não-viscosa. Em seguida, na seção 6.3, o sistema de equações obtido terá suas características analisadas. Já a seção 6.4 é dedicada à modelagem dos já citados termos de transporte da massa, quantidade de movimento e energia. As propriedades do sistema de equações lineares encontram-se descritas na seção 6.5. Na seção 6.6, por sua vez, trata-se da validação do modelo proposto, aqui denominado HyTAF (*Hyperbolic Transient Annular Flow*), a ser efetuada através da solução do escoamento ascendente em um duto vertical. Também será empregado nesta etapa o programa GRAMP2 (*Generalized Runge-Kutta Annular Flow Modelling Programme – v.2*), de autoria de Barbosa e Hewitt (2006). Por último, na seção 6.7, são sintetizadas as principais atividades e conclusões do capítulo.

6.1 DESCRIÇÃO DO PADRÃO DE ESCOAMENTO

A Figura 6.1 ilustra as principais características do escoamento em análise. Conforme pode ser visto nesta, a fase líquida presente no escoamento tende a formar um filme, que molha as paredes do duto e escoam a baixas velocidades. O gás, por sua vez, se encontra na região central da tubulação e flui a uma velocidade maior.

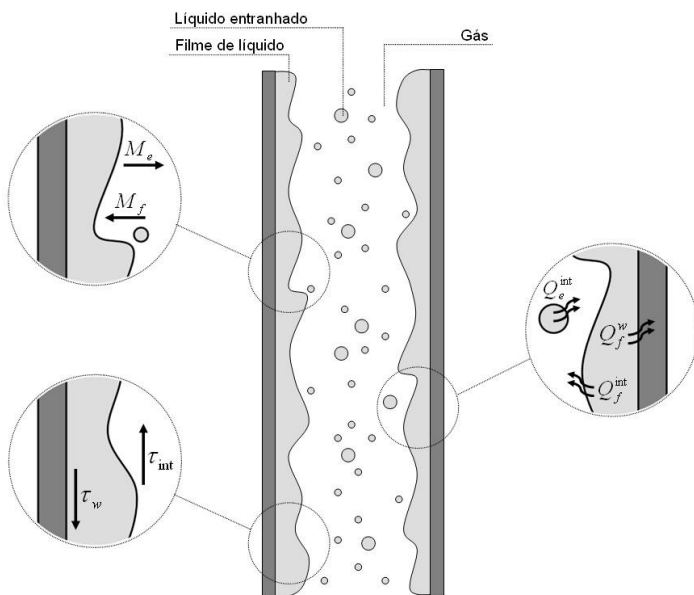


Figura 6.1 – Geometria do padrão de escoamento anular e fenômenos interfaciais associados.

Fonte: BARBOSA, 2001 (adaptado)

Devido à intensa turbulência inerente a este padrão, surgem instabilidades na superfície do filme, dando a este um aspecto ondulado. Tais perturbações propiciam o desprendimento de gotículas de líquido, que escoarão juntamente com a fase gasosa na região central da tubulação, caracterizando o fenômeno de entranhamento. Após viajarem por um tempo com o gás (e a uma velocidade tal que o escorregamento entre estas fases é mínimo), as gotículas podem vir a fazer parte do filme novamente, em um fenômeno que se denomina deposição.

No filme, atuam duas tensões cisalhantes: a primeira, causada pela presença da parede do duto (τ_w), atua contra o escoamento do líquido; a segunda, gerada a partir do arrasto viscoso com a parcela de gás (τ_{int}), atua no sentido do escoamento desta última, sendo ascendente, portanto.

Por fim, a fase gasosa troca calor tanto com o líquido entranhado quanto com o que forma o filme, e este último pode ainda trocar calor com a parede do duto.

6.2 SISTEMA DE EQUAÇÕES DE CONSERVAÇÃO

As equações de conservação da massa para o gás, o líquido entranhado e o líquido na forma de filme, podem ser expressas, respectivamente, como

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_g \rho_g) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_g \rho_g U_c) = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_e \rho_e) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_e \rho_e U_c) = M_e - M_f \quad (6.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_f \rho_f) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_f \rho_f U_f) = M_f - M_e \quad (6.3)$$

onde M_e representa a taxa de entranhamento, e M_f , a taxa de deposição.

Após se expandir as derivadas das Equações (6.1) a (6.3) e aplicar sobre estas relações de estado termodinâmicas, as mesmas assumem uma forma não-conservativa, dada por

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_g}{a_g^2} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U_c \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \rho_g \left(\frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + U_c \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} \right) + \\ & - \alpha_g \left(\frac{\rho_g \beta_g T_g}{c p_g} \right) \left(\frac{\partial s_g}{\partial t} + U_c \frac{\partial s_g}{\partial x} \right) + \alpha_g \rho_g \frac{\partial U_c}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (6.4)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_e}{a_e^2} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U_c \frac{\partial P}{\partial x} \right) - \rho_e \left(\frac{\partial \alpha_e}{\partial t} + U_c \frac{\partial \alpha_e}{\partial x} \right) + \\ & - \alpha_e \left(\frac{\rho_e \beta_e T_e}{c p_e} \right) \left(\frac{\partial s_e}{\partial t} + U_c \frac{\partial s_e}{\partial x} \right) + \alpha_e \rho_e \frac{\partial U_c}{\partial x} = M_e - M_f \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\alpha_f}{a_f^2} \left(\frac{\partial P}{\partial t} + U_f \frac{\partial P}{\partial x} \right) + \rho_f \left(\frac{\partial \alpha_f}{\partial t} + U_f \frac{\partial \alpha_f}{\partial x} \right) + \\ & - \alpha_f \left(\frac{\rho_f \beta_f T_f}{c p_f} \right) \left(\frac{\partial s_f}{\partial t} + U_f \frac{\partial s_f}{\partial x} \right) + \alpha_f \rho_f \frac{\partial U_f}{\partial x} = M_f - M_e \end{aligned} \quad (6.6)$$

Se analisadas de maneira separada, as equações de conservação da quantidade de movimento do gás e do líquido entranhado equivalem a

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_g \rho_g U_c) + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_g \rho_g U_c^2) + \alpha_g \frac{\partial P}{\partial x} = F_g^{nv} + F_g^{\text{int}} - \alpha_g \rho_g g_x \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_e \rho_e U_c) + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_e \rho_e U_c^2) + \alpha_e \frac{\partial P}{\partial x} = M_e U_f - M_f U_c + \\ + F_e^{nv} + F_e^{\text{int}} - \alpha_e \rho_e g_x \end{aligned} \quad (6.8)$$

Entretanto, uma vez que se desprezou a diferença de velocidade entre as fases em questão, é mais vantajoso trabalhar com a soma das Equações (6.7) e (6.8), o que resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\alpha_c \rho_c U_c) + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_c \rho_c U_c^2) + \alpha_c \frac{\partial P}{\partial x} = M_e U_f - M_f U_c + \\ + F_c^{nv} + F_c^{\text{int}} - \alpha_c \rho_c g_x \end{aligned} \quad (6.9)$$

sendo uma representação da conservação da quantidade de movimento da mistura entranhada, portanto. A fração volumétrica e a massa específica desta mistura foram definidas como

$$\alpha_c = \alpha_g + \alpha_e \quad (6.10)$$

$$\rho_c = \frac{\alpha_g \rho_g + \alpha_e \rho_e}{\alpha_c} \quad (6.11)$$

A conservação da quantidade de movimento para o líquido em forma de filme, por sua vez, pode ser postulada como

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_f \rho_f U_f) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_f \rho_f U_f^2) + \alpha_f \frac{\partial P}{\partial x} = M_f U_c - M_e U_f + F_f^{nv} + F_f^{\text{int}} - F_f^w - \alpha_f \rho_f g_x \quad (6.12)$$

Enfim, da expansão das derivadas temporais e espaciais das Equações (6.9) e (6.12), obtém-se

$$\alpha_c \rho_c \left(\frac{\partial U_c}{\partial t} + U_c \frac{\partial U_c}{\partial x} \right) + \alpha_c \frac{\partial P}{\partial x} = -M_e \Delta U + F_c^{nv} + F_c^{\text{int}} - \alpha_c \rho_c g_x \quad (6.13)$$

$$\alpha_f \rho_f \left(\frac{\partial U_f}{\partial t} + U_f \frac{\partial U_f}{\partial x} \right) + \alpha_f \frac{\partial P}{\partial x} = M_f \Delta U + F_f^{nv} + F_f^{\text{int}} - F_f^w - \alpha_f \rho_f g_x \quad (6.14)$$

onde

$$\Delta U = U_c - U_f \quad (6.15)$$

Já as equações de conservação da energia para as três fases do escoamento são dadas por

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\alpha_g \rho_g \left(e_g + \frac{U_c^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha_g \rho_g U_c \left(h_g + \frac{U_c^2}{2} \right) \right] + P \frac{\partial \alpha_g}{\partial t} = \\ = -Q_e^{\text{int}} - Q_f^{\text{int}} + F_c^{\text{int}} U_f - \alpha_g \rho_g U_c g_x \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\alpha_e \rho_e \left(e_e + \frac{U_c^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha_e \rho_e U_c \left(h_e + \frac{U_c^2}{2} \right) \right] + P \frac{\partial \alpha_e}{\partial t} = \\ = Q_e^{\text{int}} - \alpha_e \rho_e U_c g_x + M_e \left(h_f + \frac{U_f^2}{2} \right) - M_f \left(h_e + \frac{U_c^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (6.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\alpha_f \rho_f \left(e_f + \frac{U_f^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha_f \rho_f U_f \left(h_f + \frac{U_f^2}{2} \right) \right] + P \frac{\partial \alpha_f}{\partial t} = Q_f^{\text{int}} + \\ + Q_f^w + F_f^{\text{int}} U_f - \alpha_f \rho_f U_f g_x + M_f \left(h_e + \frac{U_c^2}{2} \right) - M_e \left(h_f + \frac{U_f^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (6.18)$$

Estas, após alguma manipulação algébrica, podem ser reescritas na forma não-conservativa em função de suas respectivas entropias, resultando em

$$\alpha_g \rho_g \left(\frac{\partial s_g}{\partial t} + U_c \frac{\partial s_g}{\partial x} \right) = S_g \quad (6.19)$$

$$\alpha_e \rho_e \left(\frac{\partial s_e}{\partial t} + U_c \frac{\partial s_e}{\partial x} \right) = S_e \quad (6.20)$$

$$\alpha_f \rho_f \left(\frac{\partial s_f}{\partial t} + U_f \frac{\partial s_f}{\partial x} \right) = S_f \quad (6.21)$$

onde

$$S_g = -\frac{1}{T_g} (Q_e^{\text{int}} + Q_f^{\text{int}} + F_c^{\text{int}} \Delta U) \quad (6.22)$$

$$S_e = \frac{Q_e^{\text{int}}}{T_e} + \frac{M_e}{T_e} \left[(h_f - h_e) + \frac{(\Delta U)^2}{2} \right] \quad (6.23)$$

$$S_f = \frac{1}{T_f} (Q_f^{\text{int}} + Q_f^w + F_f^w U_f) + \frac{M_f}{T_f} \left[(h_e - h_f) + \frac{(\Delta U)^2}{2} \right] \quad (6.24)$$

6.2.1 Modelagem das forças interfaciais não-viscosas

Conforme foi exposto anteriormente no capítulo 5, assume-se que a parcela não viscosa das forças interfaciais é devida aos efeitos de massa virtual, diferença de pressão entre fases e interface e compressibilidade das fases, o que, para a mistura entranhada, equivale a

$$F_c^{nv} = F_c^{vm} + F_c^{\Delta P} + F_c^{comp} \quad (6.25)$$

No escoamento analisado, entretanto, estas três contribuições tiveram de ser readequadas. Isto porque, ao invés de um contato entre líquido e gás, a interface em questão separa agora a fase líquida de uma mistura homogênea, esta composta por uma dispersão de líquido em gás. Também se desconsiderou a contribuição do coeficiente de massa virtual k , em parte pela não compreensão de como associá-lo aos parâmetros do escoamento, e também pela dificuldade que este parâmetro acrescenta à etapa

de divisão da matriz de coeficientes. Isto exposto, as três parcelas supracitadas foram modeladas como

$$F_c^{vm} = \alpha_c \alpha_f \Delta \rho \Delta U \left(\frac{\partial U_c}{\partial x} - \frac{\partial U_f}{\partial x} \right) \quad (6.26)$$

$$F_c^{\Delta P} = \alpha_c \alpha_f \Sigma \rho (\Delta U)^2 \frac{\partial \alpha_f}{\partial x} \quad (6.27)$$

$$F_c^{comp} = -\alpha_c \alpha_f \Sigma \rho \Delta U \left[\frac{\alpha_g}{\rho_c} \left(\frac{\partial \rho_g}{\partial t} + U_c \frac{\partial \rho_g}{\partial x} \right) + \frac{\alpha_e}{\rho_c} \left(\frac{\partial \rho_e}{\partial t} + U_c \frac{\partial \rho_e}{\partial x} \right) + \frac{\alpha_f}{\rho_f} \left(\frac{\partial \rho_f}{\partial t} + U_f \frac{\partial \rho_f}{\partial x} \right) \right] \quad (6.28)$$

onde

$$\Delta \rho = \alpha_f \rho_c - \alpha_c \rho_f \quad (6.29)$$

$$\Sigma \rho = \rho_c + \rho_f \quad (6.30)$$

Por último, tem-se que

$$F_f^{nv} = -F_c^{nv} \quad (6.31)$$

6.2.2 Forma final do sistema de equações

Partindo das Equações (6.4) a (6.6), (6.13), (6.14) e (6.19) a (6.21), e empregando ainda a relação

$$\delta \alpha_e = -\delta \alpha_g - \delta \alpha_f \quad (6.32)$$

pode-se construir um vetor de incógnitas dado por

$$\vec{U} = [P \quad \alpha_g \quad \alpha_f \quad U_c \quad U_f \quad s_g \quad s_e \quad s_f]^T \quad (6.33)$$

de modo que as equações supracitadas sejam expressas como

$$\mathbf{E} \frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \mathbf{F} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = \vec{C}^* \quad (6.34)$$

onde

$$\mathbf{E} = \left[\begin{array}{cccccc}
\frac{\alpha_g}{a_g^2} & \rho_g & 0 & 0 & 0 & -\alpha_g \left(\frac{\rho_g \beta_g T_g}{cp_g} \right) \\
\frac{\alpha_e}{a_e^2} & -\rho_e & -\rho_e & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\alpha_f}{a_f^2} & 0 & \rho_f & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\alpha_c \alpha_f \Sigma \rho \Delta U}{\rho a_0^2} & 0 & 0 & \alpha_c \rho_c & 0 & -\alpha_c \alpha_f \Sigma \rho \Delta U \left(\frac{\alpha_g \beta_g T_g}{cp_g} \right) \\
-\frac{\alpha_c \alpha_f \Sigma \rho \Delta U}{\rho a_0^2} & 0 & 0 & 0 & \alpha_f \rho_f & \alpha_c \alpha_f \Sigma \rho \Delta U \left(\frac{\alpha_g \beta_g T_g}{cp_g} \right) \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_g \rho_g \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\alpha_e \left(\frac{\rho_e \beta_e T_e}{cp_e} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -\alpha_f \left(\frac{\rho_f \beta_f T_f}{cp_f} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\alpha_c \alpha_f \Sigma \rho \Delta U \left(\frac{\alpha_e \beta_e T_e}{cp_e} \right) & -\alpha_c \alpha_f \Sigma \rho \Delta U \left(\frac{\alpha_f \beta_f T_f}{cp_f} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\alpha_c \alpha_f \Sigma \rho \Delta U \left(\frac{\alpha_e \beta_e T_e}{cp_e} \right) & \alpha_c \alpha_f \Sigma \rho \Delta U \left(\frac{\alpha_f \beta_f T_f}{cp_f} \right) & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\alpha_e \rho_e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & \alpha_f \rho_f & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right] \quad (6.35)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix}
\frac{\alpha_g U_c}{a_g^2} & \rho_g U_c & 0 & \alpha_g \rho_g & 0 \\
\frac{\alpha_e U_c}{a_e^2} & -\rho_e U_c & -\rho_e U_c & \alpha_e \rho_e & 0 \\
\frac{\alpha_f U_f}{a_f^2} & 0 & \rho_f U_f & 0 & \alpha_f \rho_f \\
\alpha_c + \frac{\alpha_c \alpha_f U_a \Sigma \rho \Delta U}{\rho_c \rho_f} & 0 & -\alpha_c \alpha_f \Sigma \rho (\Delta U)^2 & \frac{\alpha_c \rho_c U_c +}{-\alpha_c \alpha_f \Delta \rho \Delta U} & \alpha_c \alpha_f \Delta \rho \Delta U \\
\alpha_f - \frac{\alpha_c \alpha_f U_a \Sigma \rho \Delta U}{\rho_c \rho_f} & 0 & \alpha_c \alpha_f \Sigma \rho (\Delta U)^2 & \alpha_c \alpha_f \Delta \rho \Delta U & \frac{\alpha_f \rho_f U_f +}{-\alpha_c \alpha_f \Delta \rho \Delta U} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\alpha_g U_c \left(\frac{\rho_g \beta_g T_g}{c p_g} \right) & 0 & & & 0 \\
0 & -\alpha_e U_c \left(\frac{\rho_e \beta_e T_e}{c p_e} \right) & & & 0 \\
0 & 0 & & -\alpha_f U_f \left(\frac{\rho_f \beta_f T_f}{c p_f} \right) & \\
-\alpha_c \alpha_f U_c \Sigma \rho \Delta U \left(\frac{\alpha_g \beta_g T_g}{c p_g} \right) & -\alpha_c \alpha_f U_c \Sigma \rho \Delta U \left(\frac{\alpha_e \beta_e T_e}{c p_e} \right) & -\alpha_c \alpha_f U_f \Sigma \rho \Delta U \left(\frac{\alpha_f \beta_f T_f}{c p_f} \right) & & \\
\alpha_c \alpha_f U_c \Sigma \rho \Delta U \left(\frac{\alpha_g \beta_g T_g}{c p_g} \right) & \alpha_c \alpha_f U_c \Sigma \rho \Delta U \left(\frac{\alpha_e \beta_e T_e}{c p_e} \right) & \alpha_c \alpha_f U_f \Sigma \rho \Delta U \left(\frac{\alpha_f \beta_f T_f}{c p_f} \right) & & \\
\alpha_g \rho_g U_c & 0 & & & 0 \\
0 & \alpha_e \rho_e U_c & & & 0 \\
0 & 0 & & & \alpha_f \rho_f U_f
\end{bmatrix} \quad (6.36)$$

$$\vec{C}^* = \begin{bmatrix}
0 \\
M_e - M_f \\
M_f - M_e \\
-M_e \Delta U + F_c^{\text{int}} - \alpha_c \rho_c g_x \\
M_f \Delta U + F_f^{\text{int}} - F_f^w - \alpha_f \rho_f g_x \\
S_g \\
S_e \\
S_f
\end{bmatrix} \quad (6.37)$$

$$U_a = \frac{\alpha_c \rho_f U_c}{a_c^2} + \frac{\alpha_f \rho_c U_f}{a_f^2} \quad (6.38)$$

$$\rho = \alpha_c \rho_c + \alpha_f \rho_f \quad (6.39)$$

$$a_0 = \sqrt{\frac{\rho_c a_c^2 \rho_f a_f^2}{\rho (\alpha_c \rho_f a_f^2 + \alpha_f \rho_c a_c^2)}} \quad (6.40)$$

Por conseguinte, estabelece-se que

$$a_c = \sqrt{\frac{\alpha_c \rho_g a_g^2 \rho_e a_e^2}{\rho_c (\alpha_g \rho_e a_e^2 + \alpha_e \rho_g a_g^2)}} \quad (6.41)$$

O sistema descrito na Equação (6.34) pode ainda ser expresso como

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \mathbf{G} \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = \vec{C} \quad (6.42)$$

onde

$$\vec{C} = \begin{bmatrix} \rho a_0^2 \left[\kappa_g S_g + \left(\kappa_e S_e + \frac{M_e - M_f}{\rho_e} \right) + \left(\kappa_f S_f - \frac{M_e - M_f}{\rho_f} \right) \right] \\ \rho a_0^2 \left[(\varepsilon_e + \varepsilon_f) \kappa_g S_g - \varepsilon_g \left(\kappa_e S_e + \frac{M_e - M_f}{\rho_e} \right) - \varepsilon_g \left(\kappa_f S_f - \frac{M_e - M_f}{\rho_f} \right) \right] \\ \rho a_0^2 \left[-\varepsilon_f \kappa_g S_g - \varepsilon_f \left(\kappa_e S_e + \frac{M_e - M_f}{\rho_e} \right) + (\varepsilon_g + \varepsilon_e) \left(\kappa_f S_f - \frac{M_e - M_f}{\rho_f} \right) \right] \\ \frac{1}{\alpha_c \rho_c} \left[F_c^{\text{int}} - M_e \Delta U + \alpha_c \alpha_f \Sigma \rho \Delta U \left(\frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho_e} \right) (M_e - M_f) \right] - g_x \\ \frac{1}{\alpha_f \rho_f} \left[F_f^{\text{int}} - F_f^w + M_f \Delta U - \alpha_c \alpha_f \Sigma \rho \Delta U \left(\frac{1}{\rho_f} - \frac{1}{\rho_e} \right) (M_e - M_f) \right] - g_x \\ \frac{S_g}{\alpha_g \rho_g} \\ \frac{S_e}{\alpha_e \rho_e} \\ \frac{S_f}{\alpha_f \rho_f} \end{bmatrix} \quad (6.43)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix}
 (\varepsilon_c U_c + \varepsilon_f U_f) \rho a_0^2 & 0 & -\rho a_0^2 \Delta U \\
 \varepsilon_g \varepsilon_f \rho a_0^2 \Delta U & U_c & \varepsilon_g \rho a_0^2 \Delta U \\
 -\varepsilon_c \varepsilon_f \rho a_0^2 \Delta U & 0 & (\varepsilon_f U_c + \varepsilon_c U_f) \rho a_0^2 \\
 \frac{1}{\rho_c} & 0 & 0 \\
 \frac{1}{\rho_f} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 \alpha_c \rho a_0^2 & \alpha_f \rho a_0^2 & 0 & 0 & 0 \\
 \varepsilon_g (\rho_g a_g^2 - \alpha_c \rho a_0^2) & -\varepsilon_g \alpha_f \rho a_0^2 & 0 & 0 & 0 \\
 -\varepsilon_f \alpha_c \rho a_0^2 & \varepsilon_c \alpha_f \rho a_0^2 & 0 & 0 & 0 \\
 \alpha_c U_c + \alpha_f U_f & -\frac{\alpha_f \rho_f}{\rho_c} \Delta U & 0 & 0 & 0 \\
 \frac{\alpha_c \rho_c}{\rho_f} \Delta U & \alpha_c U_c + \alpha_f U_f & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & U_c & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & U_c & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & U_f
 \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

e, para uma dada fase k ,

$$\kappa_k = \frac{\beta_k T_k}{\rho_k c P_k} \quad (6.45)$$

$$\varepsilon_k = \frac{\alpha_k}{\rho_k a_k^2} \quad (6.46)$$

6.3 ANÁLISE CARACTERÍSTICA

Os autovalores e autovetores da matriz de coeficientes **G** encontram-se listados na Tabela 6.1.

Tabela 6.1 – Autovalores e autovetores da matriz de coeficientes.

AUTOVALOR	AUTOVETOR ASSOCIADO
$\lambda_1 = U + a$	$\vec{T}_1 = \begin{bmatrix} \rho_s \rho a_0^2 & \alpha_g \left(\rho_f - \frac{\rho_s \rho a_0^2}{\rho_g a_g^2} \right) - \alpha_c \alpha_f \rho a_0^2 \left(\frac{1}{a_f^2} - \frac{1}{a_c^2} \right) \\ \rho_f (a - \alpha_f \Delta U) & \rho_c (a + \alpha_c \Delta U) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$
$\lambda_2 = U - a$	$\vec{T}_2 = \begin{bmatrix} \rho_s \rho a_0^2 & \alpha_g \left(\rho_f - \frac{\rho_s \rho a_0^2}{\rho_g a_g^2} \right) - \alpha_c \alpha_f \rho a_0^2 \left(\frac{1}{a_f^2} - \frac{1}{a_c^2} \right) \\ -\rho_f (a + \alpha_f \Delta U) & -\rho_c (a - \alpha_c \Delta U) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$
$\lambda_3 = U_c$	$\vec{T}_3 = \begin{bmatrix} \alpha_f \rho_f \Delta U^2 & 0 & \alpha_f \left(1 - \alpha_f \frac{\Delta U^2}{a_f^2} \right) & 0 \\ \Delta U & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$
$\lambda_4 = U_f$	$\vec{T}_4 = \begin{bmatrix} \alpha_c \rho_c \Delta U^2 & \alpha_g \left(1 - \frac{\alpha_c \rho_c \Delta U^2}{\rho_g a_g^2} \right) - \alpha_c \left(1 - \alpha_c \frac{\Delta U^2}{a_c^2} \right) \\ -\Delta U & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$
$\lambda_5 = U_c$	$\vec{T}_5 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$
$\lambda_6 = U_c$	$\vec{T}_6 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T$
$\lambda_7 = U_c$	$\vec{T}_7 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]^T$
$\lambda_8 = U_f$	$\vec{T}_8 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1]^T$

A velocidade da mistura U e a velocidade de propagação do som nesta a são expressas por

$$U = \alpha_c U_c + \alpha_f U_f \quad (6.47)$$

$$a = \sqrt{\tilde{a}^2 - \alpha_c \alpha_f (\Delta U)^2} \quad (6.48)$$

onde

$$\tilde{a}^2 = \frac{\rho_s \rho a_0^2}{\rho_c \rho_f} \quad (6.49)$$

Ainda,

$$\rho_s = \alpha_c \rho_f + \alpha_f \rho_c \quad (6.50)$$

Por sua vez, a matriz diagonal de autovalores Λ equivale a

$$\Lambda = \begin{bmatrix} U+a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & U-a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & U_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U_f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & U_f \end{bmatrix} \quad (6.51)$$

e a matriz de transformação \mathbf{T} , a

$$\mathbf{T} = [\vec{T}_1 \quad \vec{T}_2 \quad \vec{T}_3 \quad \vec{T}_4 \quad \vec{T}_5 \quad \vec{T}_6 \quad \vec{T}_7 \quad \vec{T}_8] \quad (6.52)$$

Desta maneira, é possível decompor a matriz de coeficientes \mathbf{G} em

$$\mathbf{G}_1 = \varphi_1 \begin{bmatrix} \rho_s \rho a_0^2 \\ \frac{\alpha_g}{\rho_g a_g^2} (\rho_f \rho_g a_g^2 - \rho_s \rho a_0^2) \\ \alpha_c \alpha_f \left(\frac{1}{a_c^2} - \frac{1}{a_f^2} \right) \rho a_0^2 \\ \rho_f (a - \alpha_f \Delta U) \\ \rho_c (a + \alpha_c \Delta U) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \rho_s a + \rho_s \Delta U \Delta a \\ 0 \\ -\rho_s \rho a_0^2 \Delta U \\ \alpha_c \rho_c (\rho_f a_2^2 + \rho_s a \Delta U) \\ \alpha_f \rho_f (\rho_c a_1^2 - \rho_s a \Delta U) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \quad (6.53)$$

$$\mathbf{G}_2 = \varphi_2 \begin{bmatrix} \rho_s \rho a_0^2 \\ \frac{\alpha_g}{\rho_g a_g^2} (\rho_f \rho_g a_g^2 - \rho_s \rho a_0^2) \\ \alpha_c \alpha_f \left(\frac{1}{a_c^2} - \frac{1}{a_f^2} \right) \rho a_0^2 \\ \rho_f (-a - \alpha_f \Delta U) \\ \rho_c (-a + \alpha_c \Delta U) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -\rho_s a + \rho_s \Delta U \Delta a \\ 0 \\ -\rho_s \rho a_0^2 \Delta U \\ \alpha_c \rho_c (\rho_f a_2^2 - \rho_s a \Delta U) \\ \alpha_f \rho_f (\rho_c a_1^2 + \rho_s a \Delta U) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \quad (6.54)$$

$$\mathbf{G}_3 = \varphi_3 \begin{bmatrix} \alpha_f \rho_f (\Delta U)^2 \\ 0 \\ \alpha_f \left[1 - \frac{\alpha_f (\Delta U)^2}{a_f^2} \right] \\ 0 \\ \Delta U \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{\alpha_c \Delta U}{a_c^2} \\ 0 \\ -\rho_c \Delta U \\ \alpha_c \rho_c \\ -\alpha_c \rho_f \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}^T \quad (6.55)$$

$$\mathbf{G}_7 = U_c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.59)$$

$$\mathbf{G}_8 = U_f \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.60)$$

onde

$$\varphi_1 = (U + a) \frac{a^2 - \alpha_c \alpha_f (\Delta U)^2 + a \Delta U \Delta \alpha}{2a \rho_c \rho_f \rho_s a_3^2 a_4^2} \quad (6.61)$$

$$\varphi_2 = -(U - a) \frac{a^2 - \alpha_c \alpha_f (\Delta U)^2 - a \Delta U \Delta \alpha}{2a \rho_c \rho_f \rho_s a_3^2 a_4^2} \quad (6.62)$$

$$\varphi_3 = -\frac{\rho a_0^2 U_c}{\rho_c \rho_f a_3^2 \Delta U} \quad (6.63)$$

$$\varphi_4 = -\frac{\rho a_0^2 U_f}{\rho_c \rho_f a_4^2 \Delta U} \quad (6.64)$$

$$\varphi_5 = \frac{\rho a_0^2 U_c}{\rho_c \rho_f a_3^2 \Delta U} \quad (6.65)$$

e, adicionalmente,

$$a_1^2 = a^2 - (\alpha_c \Delta U)^2 \frac{\rho_f}{\rho_c} \quad (6.66)$$

$$a_2^2 = a^2 - (\alpha_f \Delta U)^2 \frac{\rho_c}{\rho_f} \quad (6.67)$$

$$a_3^2 = a^2 - (\alpha_f \Delta U)^2 \quad (6.68)$$

$$a_4^2 = a^2 - (\alpha_c \Delta U)^2 \quad (6.69)$$

$$\Delta a = \rho a_0^2 \left(\frac{\alpha_c^2}{\rho_c a_c^2} - \frac{\alpha_f^2}{\rho_f a_f^2} \right) \quad (6.70)$$

$$\Delta \alpha = \alpha_f - \alpha_c \quad (6.71)$$

Por fim, somando as matrizes associadas a autovalores de mesmo sinal, obtém-se

$$\mathbf{G}^+ = \mathbf{G}_1 + \frac{U_c + |U_c|}{2U_c} (\mathbf{G}_3 + \mathbf{G}_5 + \mathbf{G}_6 + \mathbf{G}_7) + \frac{U_f + |U_f|}{2U_f} (\mathbf{G}_4 + \mathbf{G}_8) \quad (6.72)$$

$$\mathbf{G}^- = \mathbf{G}_2 + \frac{U_c - |U_c|}{2U_c} (\mathbf{G}_3 + \mathbf{G}_5 + \mathbf{G}_6 + \mathbf{G}_7) + \frac{U_f - |U_f|}{2U_f} (\mathbf{G}_4 + \mathbf{G}_8) \quad (6.73)$$

possibilitando, assim, reescrever a Equação (6.42) como

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} + \mathbf{G}^+ \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} + \mathbf{G}^- \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = \vec{C} \quad (6.74)$$

6.4 MODELAGEM DOS TERMOS DE TRANSPORTE

Conforme foi mencionado no início do capítulo, a modelagem de escoamentos bifásicos de padrão anular exige a representação de uma série de fenômenos: as taxas de entranhamento e deposição são responsáveis pelo transporte de massa entre as fases de líquido entranhado e de filme, além de influenciar decisivamente o transporte das demais grandezas; as forças de arrasto interfacial e de cisalhamento com a parede do duto são relevantes para o transporte da quantidade de movimento e, em menor grau, para o da massa; menos importante, o calor trocado

por convecção entre as fases influencia no transporte da energia, e nem sempre é considerado. Sobre estes, será discorrido a seguir.

6.4.1 Transporte da massa

A modelagem das taxas de entranhamento e deposição será efetuada através do método proposto por Govan *et al.* (1988). Neste, a vazão mássica de líquido que deixa o filme \dot{m}_e^{int} é dada por

$$\dot{m}_e^{\text{int}} = \begin{cases} 0 & U_f \leq U_{\text{crit}} \\ 5,75 \times 10^{-5} \alpha_g \rho_g U_c \left[\frac{\alpha_f^2 \rho_f^3 D}{\rho_g^2 \sigma} (U_f - U_{\text{crit}})^2 \right]^{0,316} & U_f > U_{\text{crit}} \end{cases} \quad (6.75)$$

sendo a velocidade crítica U_{crit} calculada através da relação

$$U_{\text{crit}} = \frac{\mu_f}{\alpha_f \rho_f D} \exp \left(5,8504 + 0,4249 \frac{\mu_g}{\mu_f} \sqrt{\frac{\rho_f}{\rho_g}} \right) \quad (6.76)$$

É possível demonstrar que

$$M_e = \frac{4\sqrt{\alpha_c}}{D} \dot{m}_e^{\text{int}} \quad (6.77)$$

Ainda segundo Govan *et al.* (1988), a vazão mássica de líquido que aporta no filme equivale a

$$\dot{m}_f^{\text{int}} = k_f C \quad (6.78)$$

onde o coeficiente de deposição k_f é dado por

$$k_f = \begin{cases} 0,185 \left(\frac{\sigma}{\rho_g D} \right)^{0,5} & \frac{C}{\rho_g} < 0,3 \\ 0,083 \left(\frac{\sigma}{\rho_g D} \right)^{0,5} \left(\frac{\rho_g}{C} \right)^{0,65} & \frac{C}{\rho_g} \geq 0,3 \end{cases} \quad (6.79)$$

e a concentração de gotículas de líquido C , por

$$C = \frac{\alpha_e \rho_e}{\alpha_c} \quad (6.80)$$

Novamente, pode-se demonstrar que

$$M_f = \frac{4\sqrt{\alpha_c}}{D} \dot{m}_f^{\text{int}} \quad (6.81)$$

6.4.2 Transporte da quantidade de movimento

A força de cisalhamento exercida pela parede do duto sobre a fase de líquido em forma de filme será expressa, por unidade de volume, como

$$F_f^w = \frac{4}{D} \tau_w \quad (6.82)$$

onde a tensão cisalhante τ_w é, por definição,

$$\tau_w = \frac{1}{2} f_w \rho_f |U_f| U_f \quad (6.83)$$

Por sua vez, o coeficiente de atrito com a parede f_w pode ser calculado, segundo Kosky e Staub (1971), pela expressão

$$f_w = \begin{cases} \frac{16}{Re_f} & Re_f < 50 \\ \frac{12,7937}{Re_f^{0,9428}} & 50 \leq Re_f \leq 1483 \\ \frac{0,081}{Re_f^{0,25}} & Re_f > 1483 \end{cases} \quad (6.84)$$

onde o número de Reynolds do filme de líquido Re_f equivale a

$$Re_f = \frac{\alpha_f \rho_f U_f D}{\mu_f} \quad (6.85)$$

Por conseguinte, a força de arrasto por unidade de volume que atua na interface do filme de líquido com a mistura entranhada F_c^{int} será expressa por

$$F_c^{\text{int}} = \frac{4\sqrt{\alpha_c}}{D} \tau_{\text{int}} \quad (6.86)$$

onde

$$\tau_{\text{int}} = -\frac{1}{2} f_{\text{int}} \rho_c |\alpha_c U_c| \alpha_c U_c \quad (6.87)$$

De acordo com Wallis (1969), o coeficiente de atrito interfacial f_{int} pode ser obtido através da expressão

$$f_{\text{int}} = f_c \left[1 + 180 \left(1 - \sqrt{\alpha_c} \right) \right] \quad (6.88)$$

onde, para escoamentos turbulentos, tem-se que

$$f_c = \frac{0,079}{Re_c^{0,25}} \quad (6.89)$$

sendo o número de Reynolds da mistura entranhada Re_c definido como

$$Re_c = \frac{\alpha_c \rho_c U_c D}{\mu_g} \quad (6.90)$$

Enfim, para a fase de líquido em forma de filme,

$$F_f^{\text{int}} = -F_c^{\text{int}} \quad (6.91)$$

6.4.3 Transporte da energia

A exemplo dos capítulos anteriores, o acoplamento térmico entre as fases será modelado através da lei de resfriamento de Newton. Logo, na interface do líquido entranhado, constata-se que

$$Q_e^{\text{int}} = \frac{6\alpha_e}{d} h_{g,e} (T_g - T_e) \quad (6.92)$$

Semelhantemente, para a interface do líquido em forma de filme, obtém-se

$$Q_f^{\text{int}} = \frac{4\sqrt{\alpha_c}}{D} h_{g,f} (T_g - T_f) \quad (6.93)$$

Observe que, nas Equações (6.92) e (6.93), $h_{g,e}$ e $h_{g,f}$ representam os coeficientes de transferência de calor por convecção entre o gás e o líquido entranhado e entre o gás e o filme de líquido, respectivamente.

6.5 IMPLEMENTAÇÃO NUMÉRICA

A forma discretizada da Equação (6.74) resulta em um novo sistema (ver seções 2.5.1.2 e 2.5.1.4), dado por

$$\mathbf{A}\vec{X} = \vec{B} \quad (6.94)$$

Salienta-se que, para o modelo de escoamento anular, a adoção de um esquema de interpolação de segunda ordem resultou em 47 diagonais contendo elementos não nulos na matriz de blocos \mathbf{A} . Este sistema linear será mais uma vez resolvido através do *solver* GBAND.

6.6 VALIDAÇÃO: ESCOAMENTO ASCENDENTE EM DUTOS VERTICAIS

Conforme foi visto nas seções 4.6 e 5.5, o problema-teste do duto vertical possibilita a comparação direta das velocidades de propagação do modelo de escoamento com os autovalores do sistema de equações de conservação que o compõem. Para tal, basta variar os parâmetros prescritos no seu contorno. Nesta seção, serão ainda analisados os escoamentos em regime permanente associados a estas perturbações, ou seja, os escoamentos estabilizados que as precedem e os que as sucedem. Os campos assim obtidos poderão então ser validados via comparação com os calculados a partir do programa GRAMP2.

6.6.1 Descrição do problema

O problema em estudo consta de um duto vertical de $20m$ de comprimento e $0,0508m$ (2 pol) de diâmetro. Pelo seu interior escoam, no sentido ascendente, uma mistura bifásica de água e ar em arranjo anular. A Figura 6.2 ilustra a geometria do problema e seus parâmetros de controle. Conforme pode ser visualizado nesta, é provável que, nos primeiros metros a partir da entrada do duto, ocorram variações bruscas de fração volumétrica e velocidade das fases, ao que se denominou região de estabilização: tal evento é decorrente da natureza dos parâmetros e dos valores atribuídos a eles neste contorno do problema. Ao contrário de modelos clássicos do escoamento anular (Hewitt e Hall-Taylor, 1970; Govan

et al., 1988; Barbosa e Hewitt, 2001a,b; Kishore e Jayanti, 2004), que fazem uso de uma relação de equilíbrio dinâmico local entre a espessura do filme, a vazão de líquido no filme e o gradiente de pressão (a chamada relação triangular de Hewitt) e têm como parâmetros independentes a pressão e as vazões das fases e como dependentes a própria espessura do filme, a fração volumétrica de gás e as velocidades das fases, no presente modelo, grandezas como as frações volumétricas e as velocidades podem ser atribuídas de forma independente no contorno. A escolha por esta forma de se atribuir o valor das variáveis simplifica a resolução das EDPs, porém pode levar a resultados que não correspondam a uma situação de equilíbrio dinâmico local. De qualquer modo, no trecho seguinte à entrada, as taxas de entranhamento e deposição, em conjunto com as forças de cisalhamento, atuam de forma a compensar este desequilíbrio, estabilizando o escoamento.

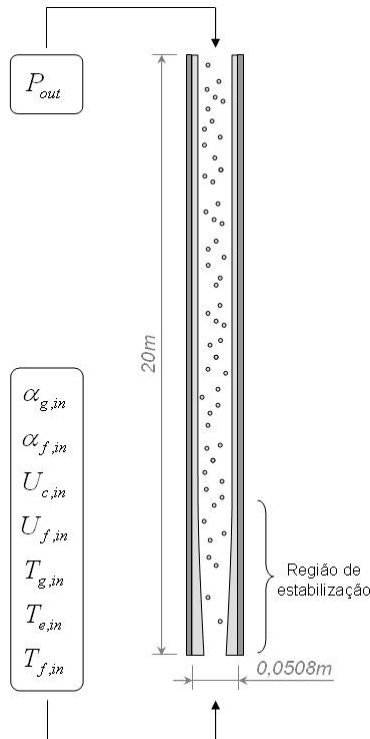


Figura 6.2 – Geometria e parâmetros de controle do problema.

6.6.2 Hipóteses adicionais e condições iniciais e de contorno

A exemplo dos problemas anteriores, o fluxo de calor que atravessa a parede do duto foi desprezado, de maneira que

$$Q_f^w = 0 \quad (6.)$$

Assumiu-se ainda que as fases não trocam calor entre si. Logo,

$$Q_e^{\text{int}} = Q_f^{\text{int}} = 0 \quad (6.)$$

As condições de contorno empregadas, por sua vez, constam nas Tabelas 6.2 e 6.3. Esta última, a exemplo das validações efetuadas nos capítulos anteriores, traz os valores dos parâmetros utilizados para induzir respostas transientes no escoamento, que pode se dar, por exemplo, a partir de uma redução de pressão na saída do duto, ou de um aumento de velocidades ou temperaturas na entrada deste.

Tabela 6.2 – Condições de contorno do problema.

VARIÁVEL	CC NA ENTRADA	CC NA SAÍDA
P	$\frac{\partial P}{\partial t} + \vec{G}_1^- \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = C_1$	$P = P_{out}$
α_g	$\alpha_g = \alpha_{g,in}$	$\frac{\partial \alpha_g}{\partial t} + \vec{G}_2^+ \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = C_2$
α_f	$\alpha_f = \alpha_{f,in}$	$\frac{\partial \alpha_f}{\partial t} + \vec{G}_3^+ \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = C_3$
U_c	$U_c = U_{c,in}$	$\frac{\partial U_c}{\partial t} + \vec{G}_4^+ \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = C_4$
U_f	$U_f = U_{f,in}$	$\frac{\partial U_f}{\partial t} + \vec{G}_5^+ \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = C_5$
s_g	$s_g = s_g(T_{g,in}, P)$	$\frac{\partial s_g}{\partial t} + \vec{G}_6^+ \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = C_6$
s_e	$s_e = s_e(T_{e,in}, P)$	$\frac{\partial s_e}{\partial t} + \vec{G}_7^+ \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = C_7$
s_f	$s_f = s_f(T_{f,in}, P)$	$\frac{\partial s_f}{\partial t} + \vec{G}_8^+ \frac{\partial \vec{U}}{\partial x} = C_8$

Tabela 6.3 – Parâmetros de controle.

PARÂMETRO	VALOR INICIAL	VALOR PERTURBADO
P_{out} [kPa]	500	480
$\alpha_{g,in}$ [-]	0,975	0,950
$\alpha_{f,in}$ [-]	0,024	0,048
$U_{c,in}$ [m/s]	12	15
$U_{f,in}$ [m/s]	12	15
$T_{g,in}$ [K]	300	350
$T_{e,in}$ [K]	300	350
$T_{f,in}$ [K]	300	350

As condições iniciais do problema correspondem à solução do mesmo em regime permanente e para o conjunto de parâmetros listado na segunda coluna da Tabela 6.3.

6.6.3 Malha computacional e procedimento de solução

O duto vertical foi discretizado em 2001 nós, espaçados uniformemente de $10mm$. Utilizou-se um incremento de tempo igual a $2 \times 10^{-5} s$, e a simulação foi encerrada em $t_{max} = 10s$. O procedimento de solução, dentro de um determinado passo de tempo, consiste das seguintes etapas:

1. Assume-se que os campos são os mesmos obtidos no passo de tempo anterior.
2. Obtém-se o vetor termo-fonte \vec{B} .
3. Calcula-se os autovalores em cada nó.
4. Determina-se os coeficientes de \mathbf{A} .
5. Resolve-se a Equação (6.94) via GBAND, de maneira a se obter novos campos de P , α_g , α_f , U_c , U_f , s_g , s_e e s_f .
6. A partir dos campos atualizados de P , s_g , s_e e s_f , são determinadas as demais propriedades termodinâmicas em cada nó da malha computacional, por meio de equações de estado para o gás (mais uma vez assumindo a hipótese de gás ideal) e para o líquido (fazendo uso das

subrotinas do programa REFPROP 7.0 [Lemmon, McLinden e Huber, 2002], novamente).

7. Retorna-se ao item 2 até a convergência dos campos. As tolerâncias aplicadas, baseadas na diferença absoluta das variáveis entre iterações sucessivas, se encontram na Tabela 6.4.

Tabela 6.4 – Tolerâncias aplicadas na convergência dos campos.

VARIÁVEL	TOLERÂNCIA
P [Pa]	1×10^{-5}
α_g [-]	1×10^{-11}
α_f [-]	1×10^{-11}
U_c [m/s]	1×10^{-8}
U_f [m/s]	1×10^{-8}
s_g [J/kgK]	1×10^{-4}
s_e [J/kgK]	1×10^{-4}
s_f [J/kgK]	1×10^{-4}

6.6.4 Resultados

Conforme já foi mencionado, os resultados aqui apresentados se prestam a dois objetivos: o primeiro deles é a validação das velocidades de propagação do modelo proposto, a ser efetuada nos mesmos moldes dos capítulos anteriores, ou seja, através da análise dos regimes transientes; o segundo consiste na validação dos campos calculados pelo modelo para a condição de regime permanente, via comparação com os resultados obtidos pelo programa GRAMP2 para condições de contorno equivalentes.

6.6.4.1 Validação das velocidades de propagação do modelo

Na Figura 6.3, é apresentado o transiente originado pela redução da pressão na saída do duto. Tal redução se traduz em

uma onda de rarefação, que viaja em alta velocidade (da ordem de $U - a$, mais precisamente) do seu local de origem até a entrada do escoamento.

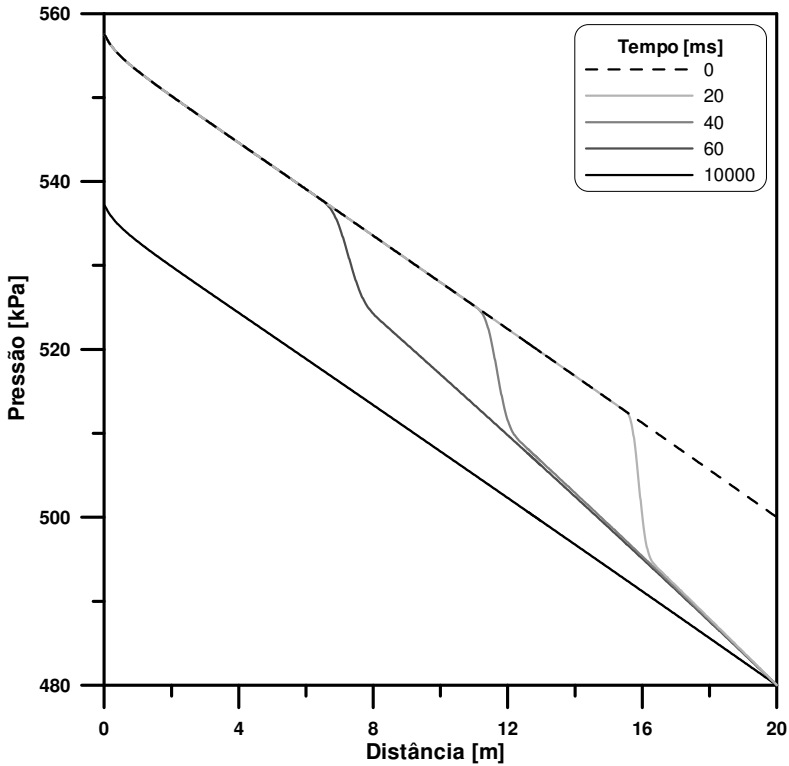


Figura 6.3 – Campos de pressão para diversos instantes de tempo simulados. Regime transiente introduzido pela variação da pressão na saída do duto.

Os transientes mostrados nas Figuras 6.4 e 6.5, por sua vez, são provocados pelo aumento simultâneo das velocidades das fases na entrada do duto, o que provoca o aparecimento de uma onda de choque que se desloca em direção à saída do duto a uma velocidade da ordem de $U + a$.

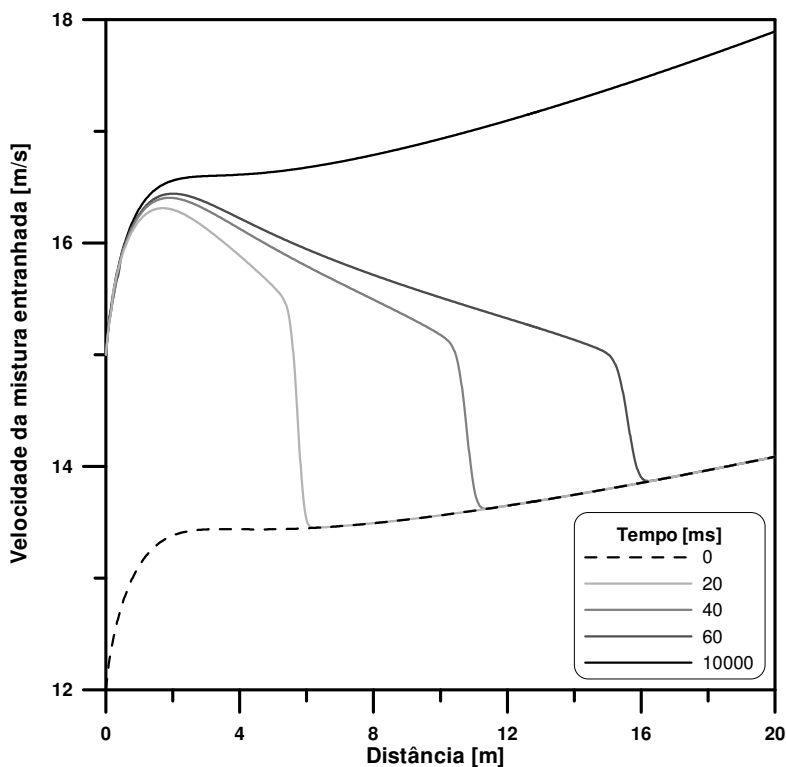


Figura 6.4 – Campos de velocidade da mistura entranhada para diversos instantes de tempo simulados. Regime transiente introduzido pela variação da velocidade da mistura entranhada e do filme de líquido na entrada do duto.

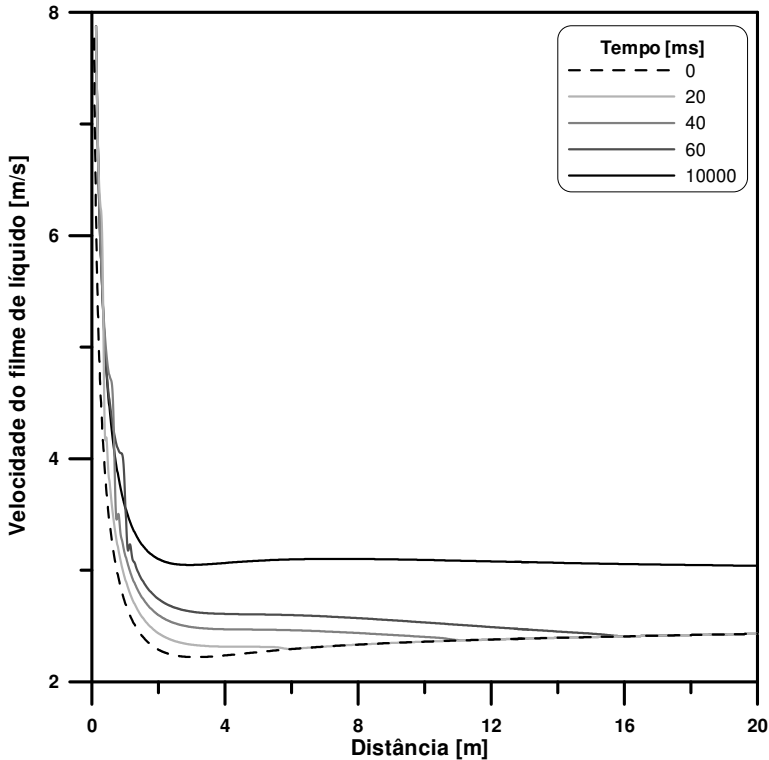


Figura 6.5 – Campos de velocidade do filme de líquido para diversos instantes de tempo simulados. Regime transiente introduzido pela variação da velocidade da mistura entranhada e do filme de líquido na entrada do duto.

Como pode ser visto nas figuras acima, a amplitude da descontinuidade que caracteriza a onda de choque se reduz à medida que esta se desloca, refletindo a ação dos efeitos viscosos e de interação entre as fases sobre as velocidades da mistura entranhada e do filme de líquido.

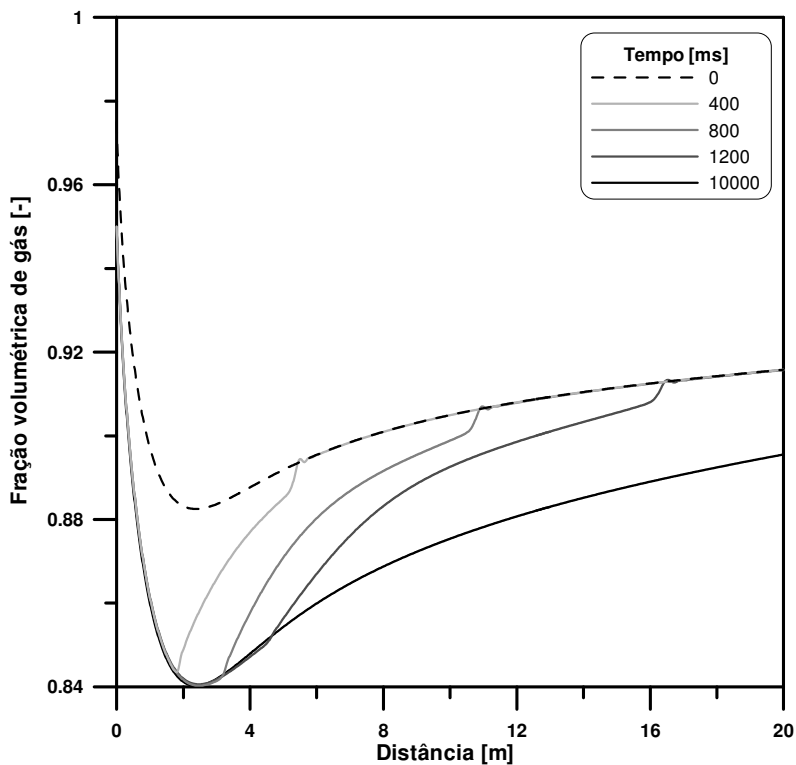


Figura 6.6 – Campos de fração volumétrica de gás para diversos instantes de tempo simulados. Regime transiente introduzido pela variação da fração volumétrica de gás e de líquido na entrada do duto.

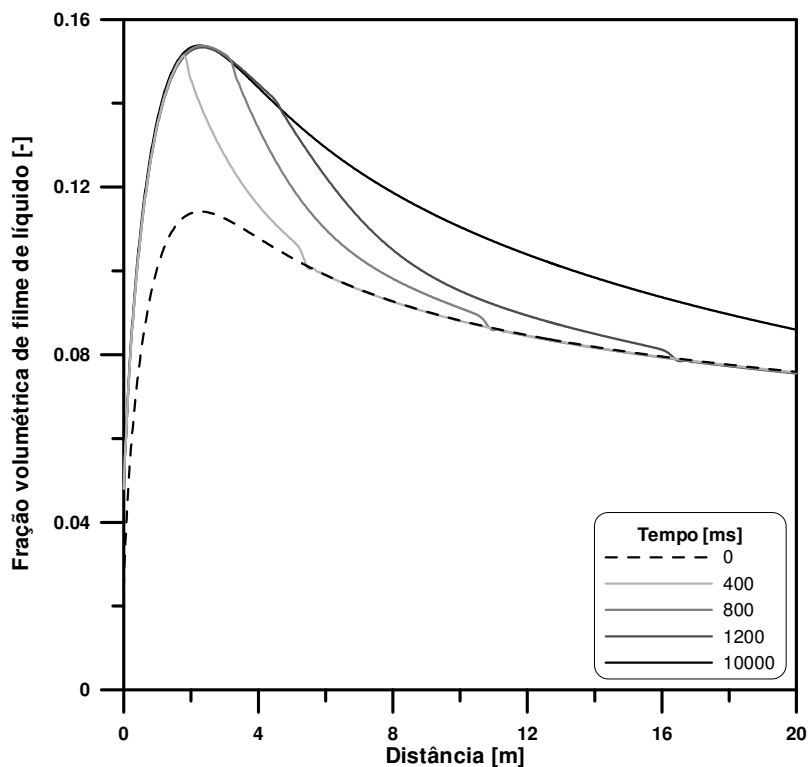


Figura 6.7 – Campos de fração volumétrica de filme de líquido para diversos instantes de tempo simulados. Regime transiente introduzido pela variação da fração volumétrica de gás e de líquido na entrada do duto.

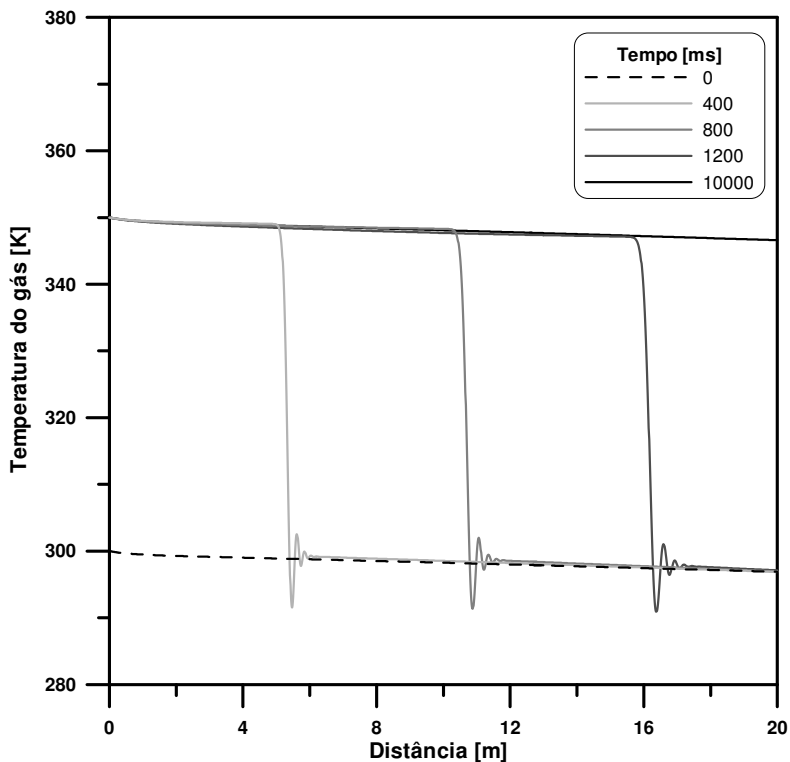


Figura 6.8 – Campos de temperatura do gás para diversos instantes de tempo simulados. Regime transiente introduzido pela variação da temperatura do gás na entrada do duto.

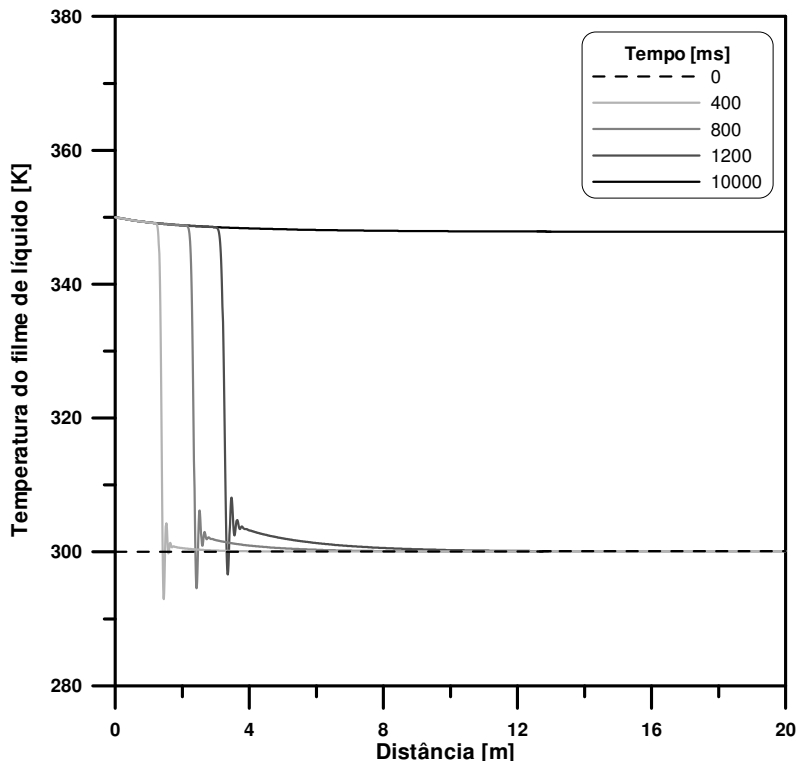


Figura 6.9 – Campos de temperatura do filme de líquido para diversos instantes de tempo simulados. Regime transiente introduzido pela variação da temperatura do filme de líquido na entrada do duto.

Já o comportamento observado nas Figuras 6.6 a 6.9 é análogo aos anteriores, a menos da taxa com que as ondas se propagam: pode-se perceber que, conforme era esperado, as velocidades de propagação das variáveis P , U_c e U_f são de uma ordem de grandeza superior às observadas para α_g , α_f , s_g e s_f .

As velocidades médias de propagação observadas, bem como as esperadas a partir modelo (pela integração definida na Equação [4.81]), encontram-se listadas na Tabela 6.5.

Tabela 6.5 – Velocidades de propagação: comparação entre os valores observados e os esperados.

VELOCIDADE DE PROPAGAÇÃO	VALOR OBSERVADO	VALOR ESPERADO
$U + a$	248,3	244,9
$U - a$	-221,6	-219,5
U_c	13,4	13,6
U_f	2,4	2,3

A Tabela 6.5 evidencia ainda uma excelente concordância entre os resultados. Desta maneira, comprova-se que, para o padrão de escoamento anular, a não-inclusão do coeficiente de massa virtual k proposto por Städtke (2006), discutida e justificada no capítulo 5, é uma aproximação perfeitamente cabível. Entretanto, é necessário cautela, uma vez que tal coeficiente provavelmente ganharia importância se outras configurações de escoamento, especialmente as de forte acoplamento mecânico entre as fases, fossem analisadas (Geurst, 1985).

6.6.4.2 Validação dos campos para a condição regime permanente

Se comparado ao modelo proposto, o programa GRAMP2 apresenta algumas diferenças conceituais. A começar pela pelas condições de contorno do problema que, conforme apontado acima, passam a ser a pressão, o fluxo de massa de cada uma das fases e a temperatura média do escoamento, e das quais se assume que apenas a pressão é variável ao longo do domínio de solução. Outra diferença diz respeito ao posicionamento destas condições no contorno do problema: por ser um simulador de regime permanente, o mesmo utiliza um eficiente método de solução em marcha, de montante para jusante. Conseqüentemente, todas as condições de contorno informadas devem ser referentes à entrada do duto, inclusive a pressão. Por fim, o programa, em sua versão utilizada para a comparação com o presente modelo, ainda assume escoamento isotérmico.

A Tabela 6.6 esquematiza os parâmetros na entrada do escoamento para as condições inicial e de perturbação em P_{out} , em $\alpha_{g,in}$ e $\alpha_{f,in}$, bem como $U_{c,in}$ e $U_{f,in}$.

Tabela 6.6 – Condições de simulação do programa GRAMP2.

CONDIÇÃO	P_{in} [kPa]	$G_{g,in}$ [kg/m ² s]	$G_{e,in}$ [kg/m ² s]	$G_{f,in}$ [kg/m ² s]	T [K]
Inicial	557,5	75,73	11,95	286,8	300,0
Perturbação P_{out}	537,1	72,97	11,95	286,8	300,0
Perturbação $\alpha_{g,in}$ e $\alpha_{f,in}$	599,4	79,34	23,91	573,6	300,0
Perturbação $U_{c,in}$ e $U_{f,in}$	581,3	98,71	14,94	358,5	300,0

A comparação dos campos assim obtidos com os calculados através do modelo proposto é feita nas Figuras 6.10 a 6.16.

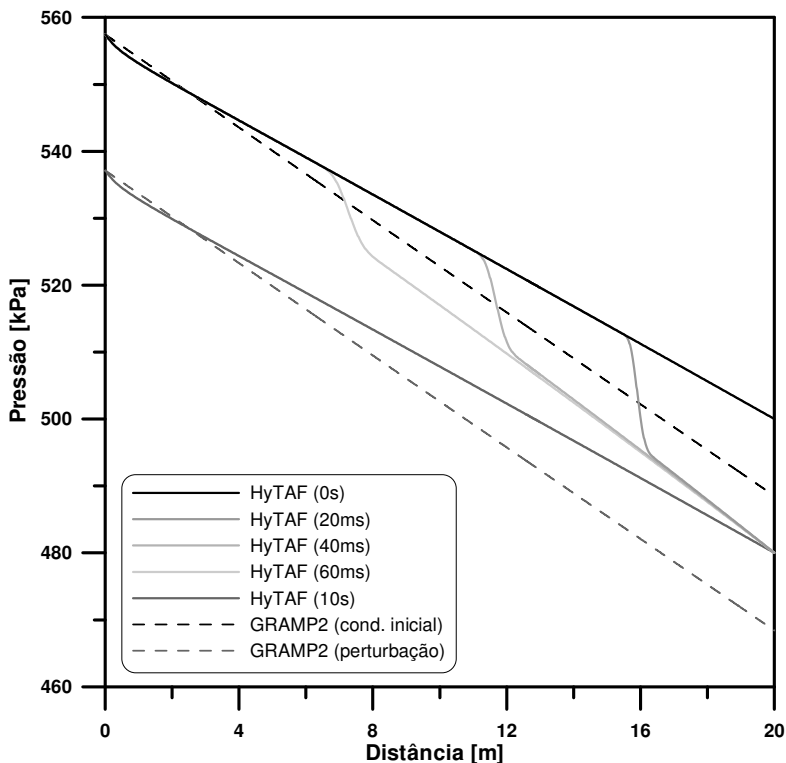


Figura 6.10 – Campos de pressão para diversos instantes de tempo simulados. Regime transiente introduzido pela variação da temperatura do filme de líquido na entrada do duto. Comparação entre as soluções obtidas pelo modelo proposto (HyTAF) e pelo programa GRAMP2.

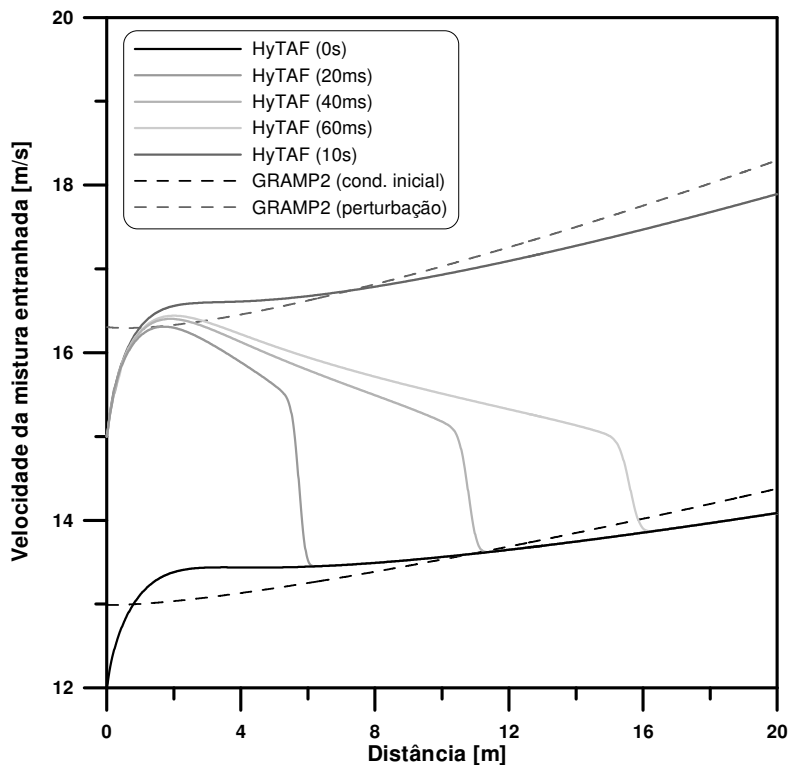


Figura 6.11 – Campos de velocidade da mistura entranhada para diversos instantes de tempo simulados. Regime transiente introduzido pela variação da velocidade da mistura entranhada e do filme de líquido na entrada do duto. Comparação entre as soluções obtidas pelo modelo proposto (HyTAF) e pelo programa GRAMP2.

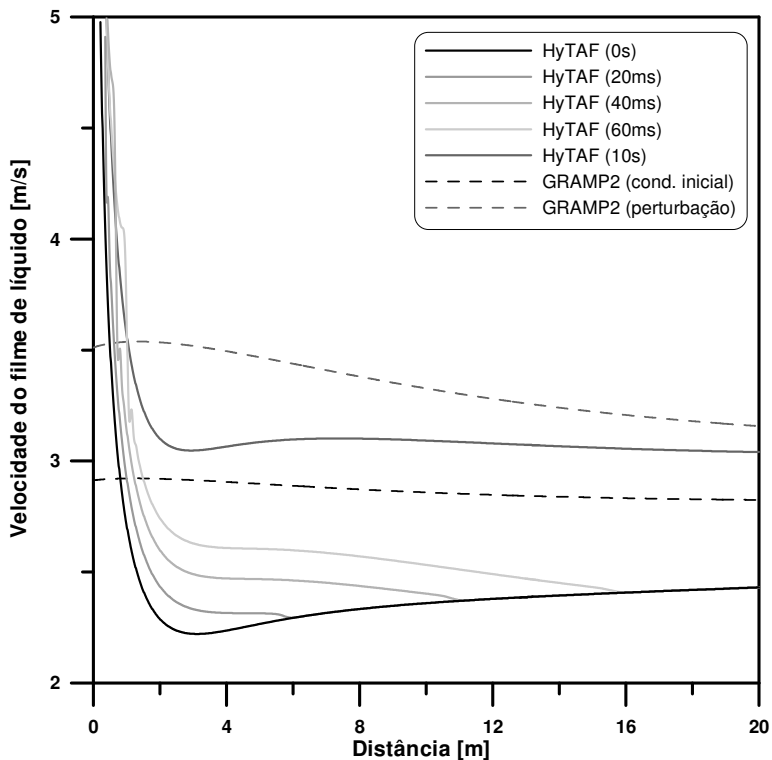


Figura 6.12 – Campos de velocidade do filme de líquido para diversos instantes de tempo simulados. Regime transiente introduzido pela variação da velocidade da mistura entranhada e do filme de líquido na entrada do duto. Comparação entre as soluções obtidas pelo modelo proposto (HyTAF) e pelo programa GRAMP2.

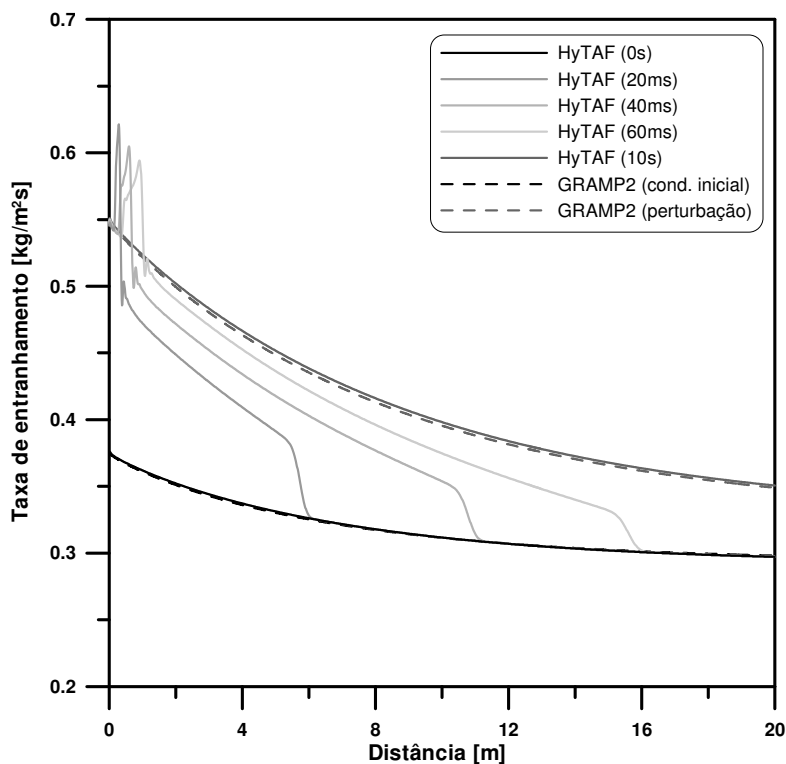


Figura 6.13 – Campos de taxa de entranhamento para diversos instantes de tempo simulados. Regime transiente introduzido pela variação da velocidade da mistura entranhada e do filme de líquido na entrada do duto. Comparação entre as soluções obtidas pelo modelo proposto (HyTAF) e pelo programa GRAMP2.

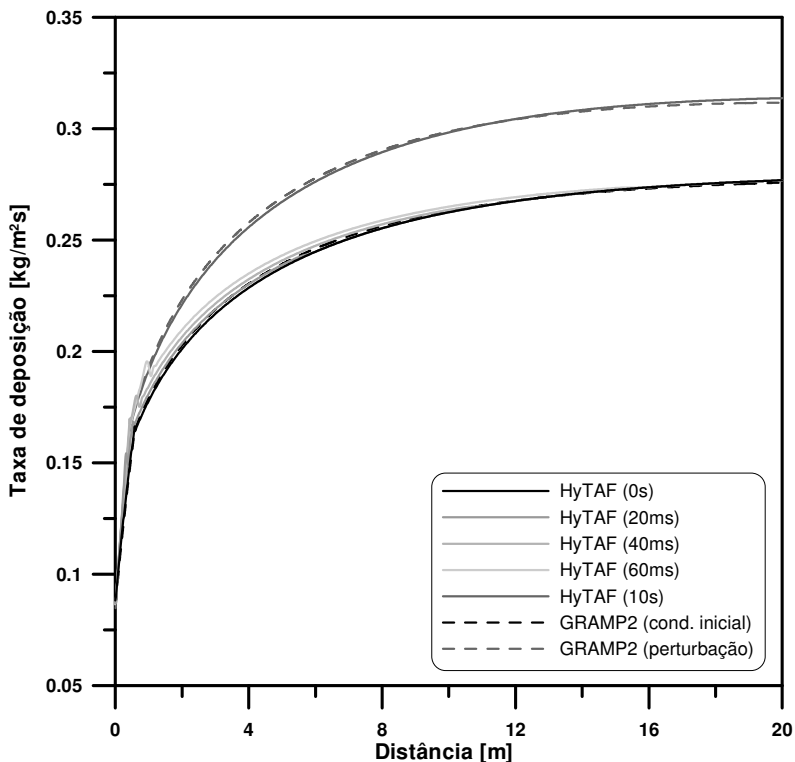


Figura 6.14 – Campos de taxa de deposição para diversos instantes de tempo simulados. Regime transiente introduzido pela variação da velocidade da mistura entranhada e do filme de líquido na entrada do duto. Comparação entre as soluções obtidas pelo modelo proposto (HyTAF) e pelo programa GRAMP2.

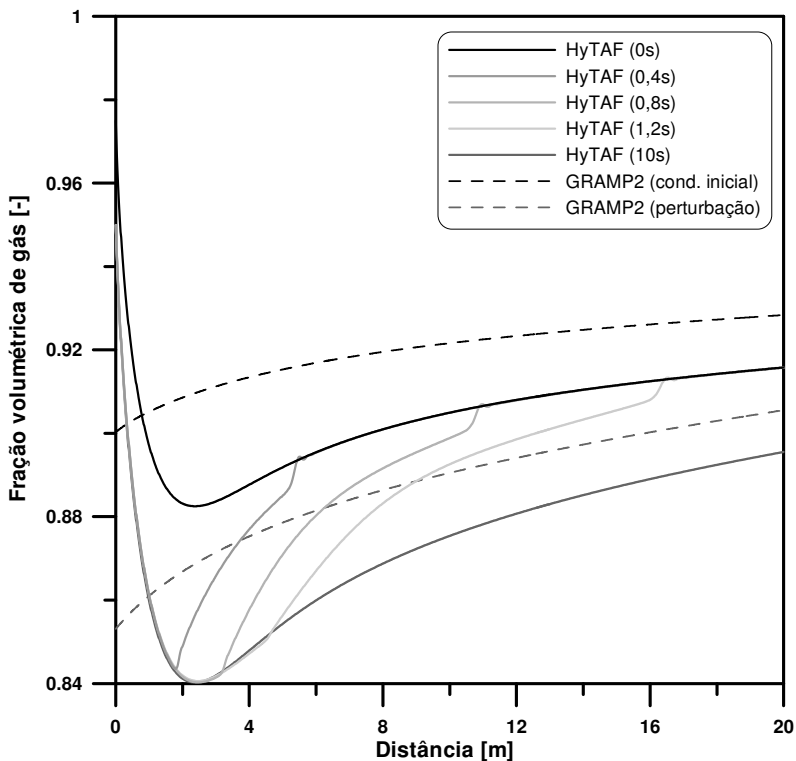


Figura 6.15 – Campos de fração volumétrica de gás para diversos instantes de tempo simulados. Regime transiente introduzido pela variação da fração volumétrica de gás e de líquido na entrada do duto. Comparação entre as soluções obtidas pelo modelo proposto (HyTAF) e pelo programa GRAMP2.

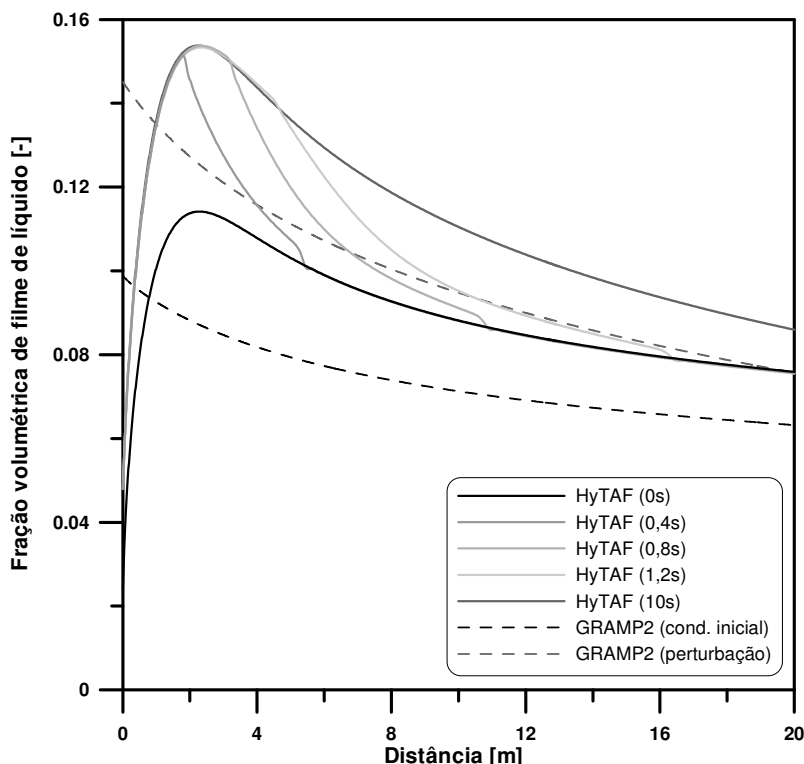


Figura 6.16 – Campos de fração volumétrica de filme de líquido para diversos instantes de tempo simulados. Regime transiente introduzido pela variação da fração volumétrica de gás e de líquido na entrada do duto. Comparação entre as soluções obtidas pelo modelo proposto (HyTAF) e pelo programa GRAMP2.

Conforme pode ser visto na Figura 6.10, os campos de pressão calculados apresentam boa concordância, dentro da expectativa de uma comparação entre modelos bifásicos. O mesmo também é verificado para os campos de taxa de entranhamento e deposição, ilustrados nas Figuras 6.13 e 6.14, respectivamente. Tal fato era esperado, uma vez que ambos os códigos fazem uso das mesmas relações de fechamento para tais parâmetros. Já nas Figuras 6.11, 6.12, 6.15 e 6.16, nota-se que a maior não-conformidade entre as simulações se concentra nos primeiros 3m de escoamento: este é o comprimento necessário para que o modelo proposto estabilize as velocidades da mistura entranhada e do filme de líquido (que, por sua vez, influem

diretamente nas frações volumétricas das fases); já no programa GRAMP2, este equilíbrio é atingido desde o início do escoamento, uma vez que as velocidades no contorno não são um parâmetro de entrada, e sim resultado de um balanço de forças no local. No trecho restante, os resultados se mostram satisfatoriamente próximos, todos apresentando tendências idênticas.

Partindo do exposto, pode-se concluir que, nesta etapa de validação, os campos de fluxo de massa das fases são mais significativos que suas velocidades e frações volumétricas, uma vez que os primeiros não são influenciados pelas peculiaridades de cada modelo. Estes se encontram ilustrados nas Figuras 6.17 a 6.19, para um transiente causado pelo aumento da velocidade das fases na entrada.

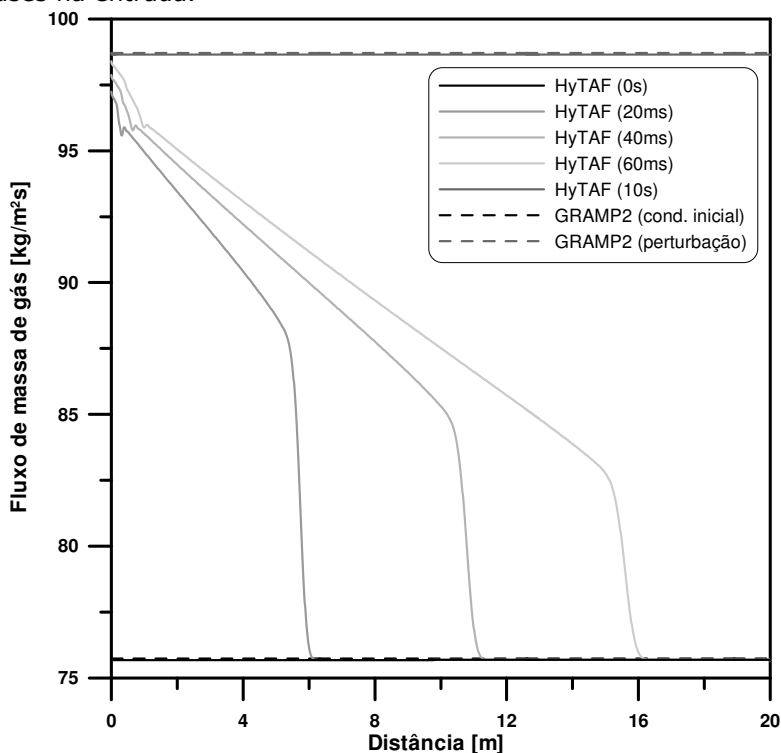


Figura 6.17 – Campos de fluxo de massa de gás para diversos instantes de tempo simulados. Regime transiente introduzido pela variação da velocidade da mistura entranhada e do filme de líquido na entrada do duto.

Comparação entre as soluções obtidas pelo modelo proposto (HyTAF) e pelo programa GRAMP2.

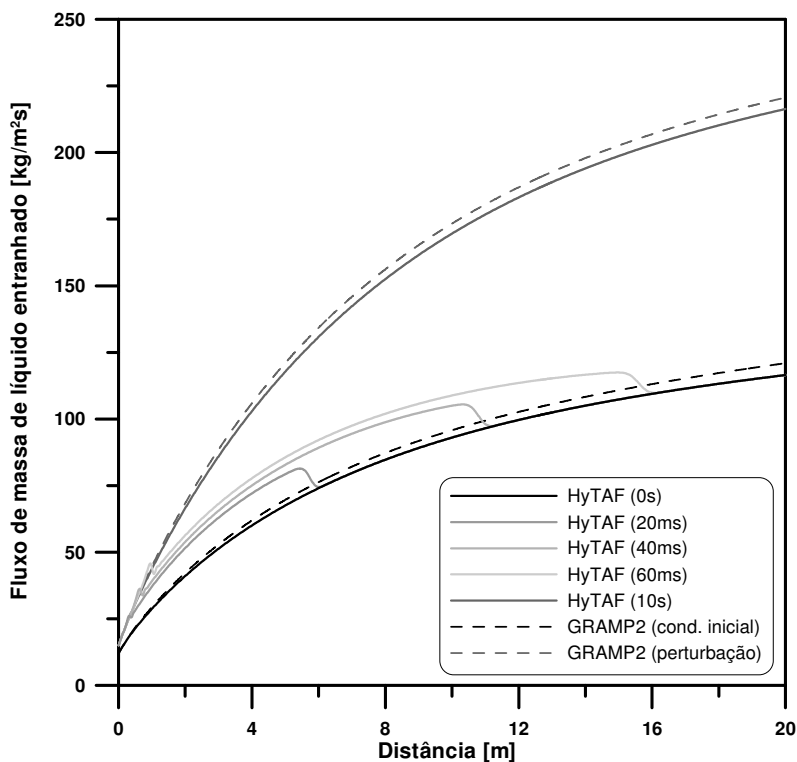


Figura 6.18 – Campos de fluxo de massa de líquido entranhado para diversos instantes de tempo simulados. Regime transiente introduzido pela variação da velocidade da mistura entranhada e do filme de líquido na entrada do duto. Comparação entre as soluções obtidas pelo modelo proposto (HyTAF) e pelo programa GRAMP2.

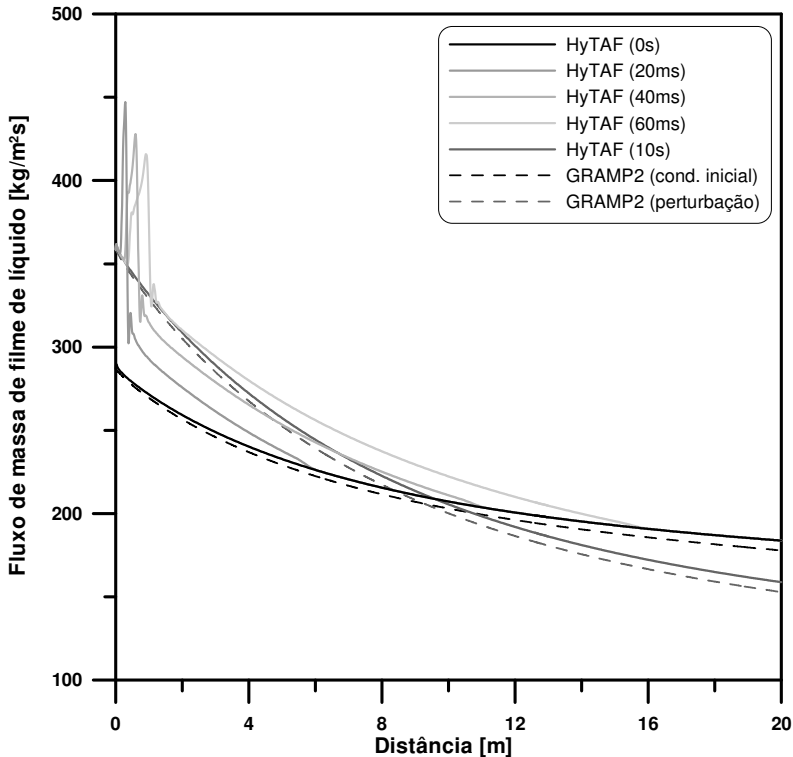


Figura 6.19 – Campos de fluxo de massa de filme de líquido para diversos instantes de tempo simulados. Regime transiente introduzido pela variação da velocidade da mistura entranhada e do filme de líquido na entrada do duto. Comparação entre as soluções obtidas pelo modelo proposto (HyTAF) e pelo programa GRAMP2.

Analisando as Figuras 6.17 a 6.19, fica notória a ótima concordância entre os campos, salvo pela dispersão numérica apresentada pelo modelo proposto na entrada do duto. Acredita-se que esta dispersão é causada pela brusca injeção das fases gerando o transiente, que se reflete em uma alteração na taxa de entranhamento. As instabilidades ocasionadas em todas as variáveis (principalmente no fluxo de massa do filme de líquido) são transportadas ao longo do canal, não permanecendo nas soluções para a condição de regime permanente obtida após a perturbação. Outro resultado relevante, a fração de líquido entranhado, pode ser obtido a partir destas duas últimas figuras, através da relação

$$f_e = \frac{G_e}{G_e + G_f} \quad (6.95)$$

As frações de líquido entranhado são comparadas na Figura 6.20.

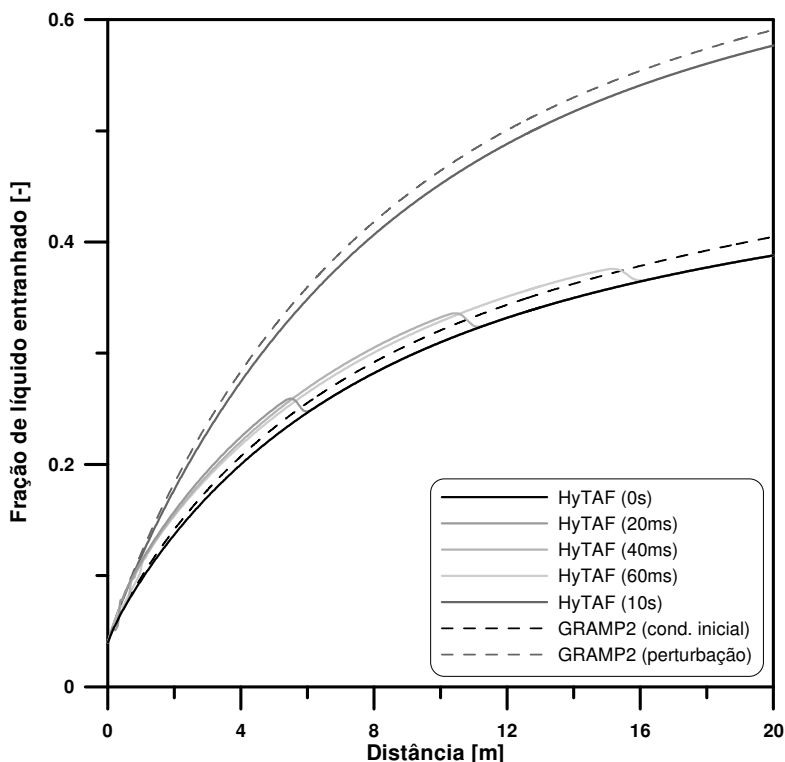


Figura 6.20 – Campos de fração entranhada de líquido para diversos instantes de tempo simulados. Regime transiente introduzido pela variação da velocidade da mistura entranhada e do filme de líquido na entrada do duto. Comparação entre as soluções obtidas pelo modelo proposto (HyTAF) e pelo programa GRAMP2.

Mais uma vez, constata-se a proximidade dos resultados mostrados na Figura 6.20.

6.7 SUMÁRIO

Neste capítulo, foi proposto um modelo transiente de dois fluidos para o padrão de escoamento anular, com base no trabalho de Städtke (2006). Este arranjo de fases é o predominante na coluna de produção de poços verticais de gás úmido, tendo em vista as elevadas velocidades superficiais observadas em tal equipamento.

O modelo fez uso de variáveis não-conservativas e foi formulado para a condição de não-equilíbrio termodinâmico. Sua configuração de fluxo exigiu uma série de adequações na modelagem das forças interfaciais de origem não-viscosa, aqui discutidas, que garantiram a hiperbolicidade do sistema de equações de conservação e viabilizaram, assim, a aplicação do SCMM. Destaca-se a exclusão do coeficiente de massa virtual k , justificada pela dificuldade em obtê-lo a partir de parâmetros do escoamento e incentivada pela necessidade de simplificar o processo de divisão da matriz de coeficientes.

Parte da validação se deu novamente através da solução do escoamento ascendente em um duto vertical. O modelo apresentou uma ótima concordância entre as velocidades de propagação observadas e as que seriam esperadas a partir da análise característica efetuada na seção 6.3. Verificou-se ainda que a nulidade do coeficiente de massa virtual k não comprometeu a simulação de forma alguma. Esta afirmação talvez não fosse verdadeira, caso se estivesse analisando um padrão de escoamento de outra natureza.

Enfim, o modelo proposto teve seus resultados em regime permanente comparados ao que foram obtidos pelo programa GRAMP2. Observou-se uma proximidade satisfatória entre os campos, exceto na região de estabilização do escoamento, onde mais se manifestam as diferenças na concepção dos dois modelos.

7 CONCLUSÕES E SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

O presente trabalho foi dedicado ao desenvolvimento e validação de um modelo de escoamento em regime transiente para o padrão bifásico anular. Escoamentos de tal natureza caracterizam-se pela coexistência de um filme de líquido, na região próxima à parede do duto, e uma mistura formada por gotículas de líquido suspensas em fase gasosa, na porção central deste, e encontram aplicação prática em poços verticais produtores de gás úmido.

O modelo proposto, referido como HyTAF (*Hyperbolic Transient Annular Flow*), baseia-se na solução das equações de conservação das fases (massa, quantidade de movimento e energia), através do Método da Divisão da Matriz de Coeficientes (Chakravarthy et al., 1980). Este, por sua vez, consiste em uma técnica CFD que se utiliza da hiperbolicidade do sistema de Equações Diferenciais Parciais resultante a fim de reduzir as instabilidades numéricas oriundas do Método das Diferenças Finitas. O HyTAF resultou da abordagem sucessiva de escoamentos em ordem crescente de complexidade, para os quais foram formulados e validados modelos monofásicos, bifásicos homogêneos e de dois fluidos. No decorrer da atividade, discorreu-se sobre o emprego de diferentes formulações e hipóteses de acoplamento térmico, que se traduziu em uma proposta inovadora para o cômputo do fluxo de calor interfacial segundo a condição de equilíbrio termodinâmico.

Em sua forma final, o modelo proposto pode ser classificado como de dois fluidos e não-equilíbrio termodinâmico. Sua configuração de fluxo exigiu uma série de adequações na modelagem das forças interfaciais introduzidas por Städtke (2006), que se propõem a garantir a hiperbolicidade do sistema de EDPs. Neste sentido, merece destaque a desconsideração do coeficiente de massa virtual k , dada a dificuldade em obtê-lo a partir de parâmetros do escoamento. Tal iniciativa simplificou o processo de divisão da matriz de coeficientes, adicionalmente.

A validação do HyTAF foi conduzida inicialmente através da comparação dos autovalores da matriz de coeficientes com as velocidades de propagação simuladas em um problema-teste. Os resultados desta análise foram bastante satisfatórios, indicando

que a nulidade do coeficiente de massa virtual k não comprometeu a qualidade da simulação. Em um segundo momento, comparou-se os campos obtidos para a condição de regime permanente com os calculados pelo programa GRAMP2, este desenvolvido por Barbosa e Hewitt (2006), empregando condições de contorno iguais ou compatíveis. Tal validação foi dificultada pela ocorrência da região de estabilização no modelo proposto, onde foram observadas fortes oscilações nas velocidades e frações volumétricas das fases. Em contrapartida, no programa GRAMP2, este equilíbrio é atingido já no início do escoamento, uma vez que as velocidades no contorno advêm de um balanço de forças local. De qualquer modo, observou-se uma concordância satisfatória entre os campos simulados.

Futuras melhorias no modelo proposto devem incluir:

- a) Redução da região de entrada supracitada, talvez efetuando o mesmo balanço de forças que é verificado no programa GRAMP2. Desta forma, aumenta-se a aplicabilidade prática das simulações;
- b) Estratégias de otimização das rotinas computacionais, visando uma maior agilidade na obtenção dos resultados. O tempo necessário à simulação passa a ser um fator crítico à medida que maiores comprimentos de duto são considerados. Uma outra frente de trabalho poderia ser a paralelização do código;
- c) Inclusão de efeitos de mudança de fase para o gás e o líquido, objetivando o estudo do escoamento de misturas saturadas, como gás e condensado, por exemplo. Neste contexto, deverão ser incorporados ao código modelos de estado termodinâmicos que contemplem também as velocidades de ebulição e condensação.

Acredita-se que, adicionadas estas faculdades, o modelo resultante será uma importante ferramenta no estudo de fenômenos ainda não totalmente compreendidos, como a carga de líquido em poços verticais produtores de gás úmido.

REFERÊNCIAS

- ANDERSON, Jr., J.D. **Modern Compressible Flow**. Nova York: McGraw-Hill, 1982.
- ANDERSON, Jr., J.D. **Computational Fluid Dynamics: the basics with applications**. Nova York: McGraw-Hill, 1995, 547 p.
- AZIZ, K.; SETTARI, A. **Petroleum Reservoir Engineering**. Nova York: Elsevier Applied Science, 1979.
- BARBOSA, Jr., J.R. **Phase change of single component fluids and mixtures in annular flow**. Tese (Doutorado em Engenharia Química) – Imperial College of Science, Technology and Medicine, Londres, 2001.
- BARBOSA, Jr., J.R.; HEWITT, G.F. **Forced convective boiling of binary mixtures in annular flow. Part I: liquid phase mass transport**. INTERNATIONAL JOURNAL OF HEAT AND MASS TRANSFER, v. 44, p. 1465-1474, 2001a.
- BARBOSA, Jr., J.R.; HEWITT, G.F. **Forced convective boiling of binary mixtures in annular flow. Part II: heat and mass transfer**. INTERNATIONAL JOURNAL OF HEAT AND MASS TRANSFER, v. 44, p. 1475-1484, 2001b.
- BARBOSA, Jr., J.R.; HEWITT, G.F. **Gas-liquid two-phase flow in vertical pipes: a description of models used in the GRAMP2 programme**. Documento interno, Imperial College of Science, Technology and Medicine, Londres, 2006.
- BEGGS, H.D.; BRILL, J.P. **A study of two-phase flow in inclined pipes**. JOURNAL OF PETROLEUM TECHNOLOGY, Maio de 1973.
- BRILL, J.P.; MUKHERJEE, H. **Multiphase flow in wells**. Richardson: Society of Petroleum Engineers, Série Henry L. Doherty, 1999.
- CHAKRAVARTHY, S.R.; ANDERSEN, D.A.; SALAS, M.D. **The Split Coefficient Matrix Method for hyperbolic systems of**

gasdynamic equations. In: AIAA 18TH SCIENCE MEETING, paper 80-0268, Pasadena, 1980.

CHOW, C.-Y. **An introduction to Computacional Fluid Mechanics.** Nova York: WILEY, 1980.

COLEBROOK, C.F. **Turbulent flow in pipes, with particular reference to the transition region between smooth and rough pipe laws.** JOURNAL OF THE INSTITUTION OF CIVIL ENGINEERS, Londres, 1939.

DUNS, Jr., H.; ROS, N. **Vertical flow of gas and liquid mixture in wells.** In: PROCEEDINGS OF THE 6TH WORLD PETROLEUM CONGRESS, 1963.

DUTTA-ROY, K. **Transient phenomena in two-phase horizontal flowlines for the homogeneous, stratified and annular flow patterns.** Tese (Doutorado em Engenharia de Petróleo) – Universidade de Tulsa, 1984.

FALCONE, G. **Liquid loading in the operation of gas fields:** mechanisms, prediction and reservoir response. Documento interno, Texas A&M University, 2006.

FANCHER, Jr., G.H.; BROWN, K.E. **Prediction of pressure gradients for multiphase flow in tubing.** SOCIETY OF PETROLEUM ENGINEERS JOURNAL, Março de 1963.

GEURST, J.A. **Virtual mass in two-phase bubbly flow.** PHYSICA A: STATISTICAL AND THEORETICAL PHYSICS, v.129, p.233-261, Janeiro de 1985.

GOVAN, A.H.; HEWITT, G.F.; OWEN, D.G.; BOTT, T.R. **An improved CHF modelling code.** In: PROCEEDINGS OF THE 2nd UK NATIONAL HEAT TRANSFER CONFERENCE, Glasgow, 1988.

GRAY, H.E. Vertical flow correlation in natural gas wells. In: AMERICAN PETROLEUM INSTITUTE. **User manual for API 14b subsurface control safety valve sizing computer program.** 1974.

HAGEDORN, A.R.; BROWN, K.E. **The effect of liquid viscosity in vertical two-phase flow.** JOURNAL OF PETROLEUM TECHNOLOGY, Fevereiro de 1964.

HEWITT, G.F.; HALL-TAYLOR, N.S. **Annular Two-Phase Flow.** Pergamon Press, 1970.

KISHORE, B.N.; JAYANTI, S. **A multidimensional model for annular gas-liquid flow.** CHEMICAL ENGINEERING SCIENCE, v. 59, p. 3577-3589, 2004.

KOSKY, P.G.; STAUB, F.W. **Local condensing heat transfer coefficients in annular flow regimes.** AIChE JOURNAL, v.17, p.1037-1043, 1971.

LEMMON, E.W; MCLINDEN, M.O; HUBER, M.L. **REFPROP 7.0.** NIST, 2002.

LU, D.M.; SIMPSON, H.C.; GILCHRIST A. **The application of Split Coefficient Matrix Method to transient two-phase flows.** INTERNATIONAL JOURNAL OF NUMERICAL METHODS FOR HEAT AND FLUID FLOW, v.6, p. 63-76, 1996.

ORKISZEWSKI, J. **Predicting two-phase pressure drops in vertical pipe.** JOURNAL OF PETROLEUM TECHNOLOGY, Junho de 1967.

OUYANG, L.-B.; AZIZ, K. **Transient gas-liquid two-phase flow in pipes with radial influx or efflux.** JOURNAL OF PETROLEUM SCIENCE AND ENGINEERING, v.30, p.167-179, 2001.

POETTMAN, F.H.; CARPENTER, P.G. The multiphase flow of gas, oil, and water through vertical flow strings with application to the design of gas-lift installations. AMERICAN PETROLEUM INSTITUTE. **Drilling and production practice.** 1952.

ROMSTEDT, P. **A split-matrix method for the numerical solution of two-phase flow equations.** NUCLEAR SCIENCE AND ENGINEERING, v. 104, p. 1-9, 1990.

STÄDTKE, H. *et al.* **Advanced three-dimensional two-phase flow simulation tools for application to reactor safety (ASTAR).** NUCLEAR ENGINEERING AND DESIGN, n.235, p.379-400, 2005.

STÄDTKE, H. **Gasdynamic aspects of two-phase flow:** hyperbolicity, wave propagation phenomena and related numerical methods. Weinheim: WILEY-VCH, 2006, 273 p.

TAITEL, Y.; BARNEA, D.; DUKLER, A.E. **Modeling Flow Pattern Transition for Steady Upward Gas-Liquid Flow in Vertical Tubes.** AIChE JOURNAL, v.26, p.345-354, 1980.

THE WORLD FACTBOOK. Desenvolvido pela Agência de Inteligência dos EUA (CIA), apresenta aspectos socioeconômicos de 266 países, incluindo a produção, consumo, importação e exportação de hidrocarbonetos. Disponível em <www.cia.gov/library/publications/the-world-factbook/index.html>. Acesso em 11 jan. 2010.

WALLIS, G.B. **One-dimensional two-phase flow.** Nova York: McGraw-Hill, 1969.

APÊNDICE A – Avaliação numérica de derivadas

A.1 Esquemas de primeira ordem

Seja $u(x)$ uma variável qualquer do escoamento, a qual será aproximada por um polinômio de primeiro grau da forma:

$$u(x) = a + b(x - x_i) \quad (\text{A.1})$$

onde x_i é a coordenada do nó i . Fazendo uma rápida inspeção na expressão, verifica-se que

$$u(x_i) = a \quad (\text{A.2})$$

ou simplesmente

$$u_i = a \quad (\text{A.3})$$

Semelhantemente, para os nós adjacentes a i , teremos

$$u_{i-1} = a - b\Delta x_i \quad (\text{A.4})$$

$$u_{i+1} = a + b\Delta x_{i+1} \quad (\text{A.5})$$

onde

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad (\text{A.6})$$

Derivando a Equação (A.1) com relação a x , obtém-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} = b \quad (\text{A.7})$$

Assim, fazendo uso das Equações (A.3) e (A.4) para isolar o termo b , chega-se a uma expressão para a derivada de u com relação a x , que é da forma

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x_i} \quad (\text{A.8})$$

Utilizando agora as Equações (A.3) e (A.5) para o mesmo fim, encontra-se

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x_{i+1}} \quad (\text{A.9})$$

O esquema de diferenciação expresso pela Equação (A.8) é chamado BDS (*Backward Difference Scheme*), por aproveitar o valor de u no nó anterior a i . Já o esquema proposto na Equação (A.9) é chamado FDS (*Forward Difference Scheme*), pois faz uso da informação contida no nó posterior a i .

A.2 Esquemas de segunda ordem

Neste caso, a variável $u(x)$ passará a ser aproximada por um polinômio de segundo grau, ou seja,

$$u(x) = a + b(x - x_i) + c(x - x_i)^2 \quad (\text{A.10})$$

Avaliando o polinômio no nó i e nos quatro nós mais próximos a este, obtém-se

$$u_i = a \quad (\text{A.11})$$

$$u_{i-1} = a - b\Delta x_i + c(\Delta x_i)^2 \quad (\text{A.12})$$

$$u_{i-2} = a - b(\Delta x_i + \Delta x_{i-1}) + c(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})^2 \quad (\text{A.13})$$

$$u_{i+1} = a + b\Delta x_{i+1} + c(\Delta x_{i+1})^2 \quad (\text{A.14})$$

$$u_{i+2} = a + b(\Delta x_{i+1} + \Delta x_{i+2}) + c(\Delta x_{i+1} + \Delta x_{i+2})^2 \quad (\text{A.15})$$

Da derivação da Equação (A.10) em relação a x , resulta

$$\frac{\partial u}{\partial x} = b + 2c(x - x_i) \quad (\text{A.16})$$

Aplicada no nó i , tal derivada se torna

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_i} = b \quad (\text{A.17})$$

Assim, pelo emprego das Equações (A.11), (A.12) e (A.13), chega-se que a derivada de u com relação a x no nó i é da forma

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_i} = \frac{\left[\left(\frac{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}}{\Delta x_i} \right)^2 - 1 \right] u_i - \left(\frac{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}}{\Delta x_i} \right)^2 u_{i-1} + u_{i-2}}{\frac{(\Delta x_i + \Delta x_{i-1})^2}{\Delta x_i} - (\Delta x_i + \Delta x_{i-1})} \quad (\text{A.18})$$

ou então, de uma maneira mais compacta,

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_i} = \frac{(\beta^2 - 1)u_i - \beta^2 u_{i-1} + u_{i-2}}{(\beta^2 - \beta)\Delta x_i} \quad (\text{A.19})$$

onde

$$\beta = \frac{\Delta x_i + \Delta x_{i-1}}{\Delta x_i} \quad (\text{A.20})$$

Por outro lado, fazendo uso das Equações (A.11), (A.14) e (A.15), encontra-se

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_i} = \frac{\left[\left(\frac{\Delta x_{i+1} + \Delta x_{i+2}}{\Delta x_{i+1}} \right)^2 - 1 \right] u_i - \left(\frac{\Delta x_{i+1} + \Delta x_{i+2}}{\Delta x_{i+1}} \right)^2 u_{i+1} + u_{i+2}}{(\Delta x_{i+1} + \Delta x_{i+2}) - \frac{(\Delta x_{i+1} + \Delta x_{i+2})^2}{\Delta x_{i+1}}} \quad (\text{A.21})$$

A Equação (A.21) pode ainda ser reescrita como

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_i} = \frac{(\varphi^2 - 1)u_i - \varphi^2 u_{i+1} + u_{i+2}}{(\varphi - \varphi^2)\Delta x_{i+1}} \quad (\text{A.22})$$

onde

$$\varphi = \frac{\Delta x_{i+1} + \Delta x_{i+2}}{\Delta x_{i+1}} \quad (\text{A.23})$$

Analisando as equações (A.19) e (A.22), fica claro que a primeira é do tipo BDS e a última é do tipo FDS.

APÊNDICE B – Equações de conservação para escoamentos unidimensionais em regime transiente

B.1 Conservação da massa

Seja uma determinada fase k que se desloca (no sentido ascendente) no interior de um segmento de duto vertical com área transversal A e comprimento Δx , conforme ilustrado na Figura B.1.

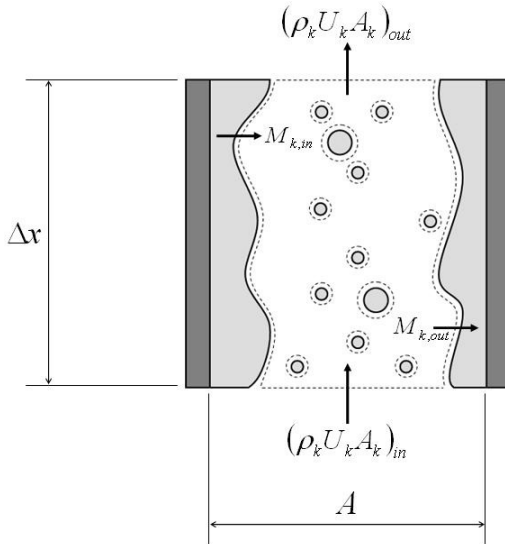


Figura B.1 – Geometria do duto, arranjo de fases e balanço de massa no volume de controle.

Note que a fase k pode estar escoando juntamente com outras fases. Para estas, também serão válidas as equações de conservação desenvolvidas neste apêndice. A Figura B.1 mostra ainda que, para o volume de controle proposto, a conservação da massa se resume a

$$\frac{\Delta(\rho_k A_k \Delta x)}{\Delta t} + (\rho_k U_k A_k)_{out} - (\rho_k U_k A_k)_{in} = M_{k,in} A \Delta x - M_{k,out} A \Delta x \quad (B.1)$$

Dividindo a Equação (B.1) pelo volume do segmento de duto, chega-se a

$$\frac{\Delta(\alpha_k \rho_k)}{\Delta t} + \frac{(\alpha_k \rho_k U_k)_{out} - (\alpha_k \rho_k U_k)_{in}}{\Delta x} = M_{k,in} - M_{k,out} \quad (B.2)$$

onde, por definição,

$$\alpha_k = \frac{A_k}{A} \quad (B.3)$$

Para intervalos infinitesimais, a equação de conservação da massa passa a ser expressa por meio de uma EDP da forma

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k \rho_k) + \frac{\partial}{\partial x}(\alpha_k \rho_k U_k) = M_{k,in} - M_{k,out} \quad (B.4)$$

Caso haja apenas uma fase escoando no duto, a Equação (B.4) se resume a

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_k) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_k U_k) = 0 \quad (B.5)$$

B.2 Conservação da quantidade de movimento

A equação de conservação da quantidade de movimento pode ser obtida através de um balanço de forças no volume de controle, como o ilustrado na Figura B.2.

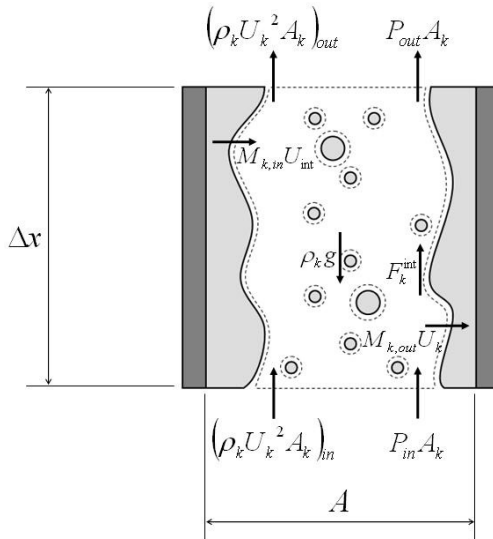


Figura B.2 – Balanço de forças no volume de controle.

Logo, tem-se que

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(\rho_k U_k A_k \Delta x)}{\Delta t} + (\rho_k U_k^2 A_k)_{out} - (\rho_k U_k^2 A_k)_{in} + P_{out} A_k - P_{in} A_k = \\ = M_{k,in} U_{int} A \Delta x - M_{k,out} U_k A \Delta x + F_k^{int} A \Delta x - \rho_k g_x A_k \Delta x \end{aligned} \quad (B.6)$$

Se dividida pelo volume do segmento de duto, a Equação (B.6) se torna

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(\alpha_k \rho_k U_k)}{\Delta t} + \frac{(\alpha_k \rho_k U_k^2)_{out} - (\alpha_k \rho_k U_k^2)_{in}}{\Delta x} + \alpha_k \frac{P_{out} - P_{in}}{\Delta x} = \\ = M_{k,in} U_{int} - M_{k,out} U_k + F_k^{int} - \alpha_k \rho_k g_x \end{aligned} \quad (B.7)$$

Tomando o limite dos incrementos, chega-se à equação de conservação da quantidade de movimento na forma diferencial, expressa por

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha_k \rho_k U_k) + \frac{\partial}{\partial x} (\alpha_k \rho_k U_k^2) + \alpha_k \frac{\partial P}{\partial x} = M_{k,in} U_{int} - M_{k,out} U_k + F_k^{int} - \alpha_k \rho_k g_x \quad (B.8)$$

Para escoamentos monofásicos, tal equação equivale a

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_k U_k) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho_k U_k^2) + \frac{\partial P}{\partial x} = F_k^{int} - \rho_k g_x \quad (B.9)$$

B.3 Conservação da energia

Na Figura B.3, ilustra-se o balanço de energia no volume de controle.

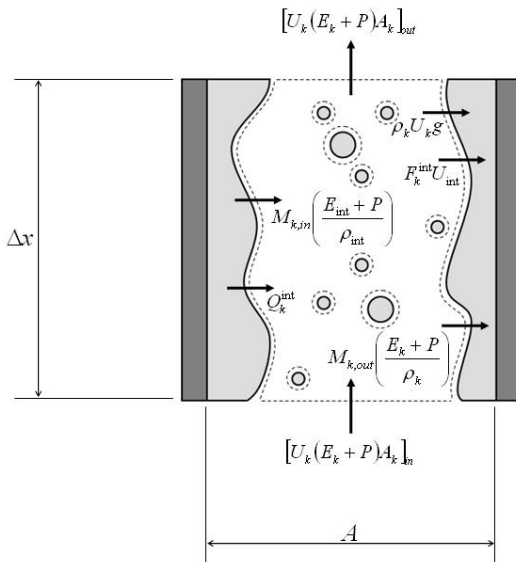


Figura B.3 – Balanço de energia no volume de controle.

Os termos ilustrados na Figura B.3 podem então ser dispostos da forma mostrada na Equação (B.10),

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(E_k A_k \Delta x)}{\Delta t} + P \frac{\Delta(A_k \Delta x)}{\Delta t} + [U_k(E_k + P)A_k]_{out} - [U_k(E_k + P)A_k]_{in} = Q_k^{int} A \Delta x + \\ + F_k^{int} U_{int} A \Delta x - \rho_k U_k g_x A_k \Delta x + M_{k,in} \left(\frac{E_{int} + P}{\rho_{int}} \right) A \Delta x - M_{k,out} \left(\frac{E_k + P}{\rho_k} \right) A \Delta x \end{aligned} \quad (B.10)$$

onde, por definição,

$$E_k = \rho_k \left(e_k + \frac{U_k^2}{2} \right) \quad (B.11)$$

Dividindo agora a Equação (B.10) pelo volume do segmento de duto, fica

$$\begin{aligned} \frac{\Delta(\alpha_k E_k)}{\Delta t} + P \frac{\Delta(\alpha_k)}{\Delta t} + \frac{[\alpha_k U_k(E_k + P)]_{out} - [\alpha_k U_k(E_k + P)]_{in}}{A \Delta x} = Q_k^{int} + F_k^{int} U_{int} + \\ - \alpha_k \rho_k U_k g_x + M_{k,in} \left(\frac{E_{int} + P}{\rho_{int}} \right) - M_{k,out} \left(\frac{E_k + P}{\rho_k} \right) \end{aligned} \quad (B.12)$$

o que, para incrementos infinitesimais, equivale a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha_k E_k) + P \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [\alpha_k U_k (E_k + P)] = Q_k^{\text{int}} + F_k^{\text{int}} U_{\text{int}} - \alpha_k \rho_k U_k g_x + \\ + M_{k,\text{in}} \left(\frac{E_{\text{int}} + P}{\rho_{\text{int}}} \right) - M_{k,\text{out}} \left(\frac{E_k + P}{\rho_k} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

ou então,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\alpha_k \rho_k \left(e_k + \frac{U_k^2}{2} \right) \right] + P \frac{\partial \alpha_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha_k \rho_k U_k \left(h_k + \frac{U_k^2}{2} \right) \right] = Q_k^{\text{int}} + F_k^{\text{int}} U_{\text{int}} + \\ - \alpha_k \rho_k U_k g_x + M_{k,\text{in}} \left(h_{\text{int}} + \frac{U_{\text{int}}^2}{2} \right) - M_{k,\text{out}} \left(h_k + \frac{U_k^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

onde

$$h_k = e_k + \frac{P}{\rho_k} \quad (\text{B.15})$$

Enfim, a equação de conservação da energia para escoamentos monofásicos é dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_k \left(e_k + \frac{U_k^2}{2} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\rho_k U_k \left(h_k + \frac{U_k^2}{2} \right) \right] = Q_k^{\text{int}} + F_k^{\text{int}} U_{\text{int}} - \rho_k U_k g_x \quad (\text{B.16})$$

APÊNDICE C – Transcrição do código-fonte do *solver* GBAND em linguagem FORTRAN

```
! *****
SUBROUTINE GBAND(A,D,X,N,M,EPS,IERR,IFRST)
! *****

IMPLICIT REAL*8(A-H,O-Z)
DIMENSION A(1), D(1), X(1)

!
! PURPOSE: solution of system of equations with band
! matrix by standard elimination without pivoting.
!
! From "Petroleum Reservoir Simulation", K. Aziz and A.
! Settari, 1979.
!
! Input/Output:
!   A : one-dimensional array containing the band of the
!       matrix stored by rows. The required dimension of A
!       is
!
!                $N*(2*M+1)-M*M-M$ 
!
! Input Only:
!   M : Number of diagonals above the main
!       diagonal.number of diagonals below the main
!       diagonal is also m, therefore the total
!       bandwidth is 2*m+1
!   N : Number of equations (unkowns)
!   D : r.h.s. vector
!   EPS : The element on the main diagonal is compared to
!          eps during elimination. If it is smaller, value
!          of the counter ierr is incremented.
!   IFRST: =0, matrix is inverted and the inverse is
!          stored in place of the original matrix.
!          >0, routine assumes that the matrix has been
!          inverted and will calculate solution
!          corresponding to the new r.h.s. vector.
!
! Output Only:
!   IERR: number of times the element on the main diagonal
!          was smaller than eps
!   X : solution vector
!
IERR = 0
```

```

J = 1
DO 10 I=1,N
    IE = M
    IEAUX = M
    IF(M.GT.N-I) IE = N-I
    IF(M.GT.I) IEAUX = I
    IE1 = IE+IEAUX
    MBIG = IE
    J1 = J+IE1
    J2 = J1
    IF(IFRST.EQ.0.AND.ABS(A(J))-EPS.LE.0.0) IERR = IERR+1
    IF(MBIG.GT.0) THEN
        DO 20 J0=1,MBIG
            SS = A(J1)/A(J)
            IF(IFRST.EQ.0) THEN
                DO 30 K=1,MBIG
                    J1K = J1+K
                    JK = J+K
                    A(J1K) = A(J1K)-A(JK)*SS
30                CONTINUE
            ENDIF
            IAUX = J0+I
            D(IAUX) = D(IAUX)-D(I)*SS
            IE = M
            IEAUX = M
            IF(M.GT.N-IAUX) IE = N-IAUX
            IF(M.GT.IAUX) IEAUX = IAUX
            IE1 = IE+IEAUX
            J1 = J1+IE1
20        CONTINUE
    ENDIF
    J = J2+1
10 CONTINUE
J = J-M-1
NP1 = N+1
DO 40 IINV=1,N
    I = NP1-IINV
    IE = M
    IF(I+M-N.GT.0) IE = N-I
    MBIG = IE
    X(I) = D(I)
    IF(MBIG.GT.0) THEN
        DO 50 K=1,MBIG
            IK = I+K
            JK = J+K
            X(I) = X(I)-X(IK)*A(JK)
50        CONTINUE
    ENDIF
    J = J+1
40 CONTINUE

```



```
50          CONTINUE
          ENDIF
          X(I) = X(I)/A(J)
          IE = M
          IEAUX = M
          IF(M.GT.NP1-I) IE = NP1-I
          IF(M.GT.I-1) IEAUX = I-1
          IE1 = IE+IEAUX
          J = J-IE1-1
40  CONTINUE
      RETURN
      END
```


APÊNDICE D – Determinação da velocidade do som na mistura para o modelo homogêneo de não-equilíbrio no software MAPLE

MEMORIAL DE CÁLCULO DA VELOCIDADE DO SOM NA MISTURA PARA O MODELO HOMOGÊNEO DE NÃO-EQUILÍBRIO

1 - COMANDOS INICIAIS

```
> restart;  
> with(LinearAlgebra):
```

2 - CONSTRUÇÃO DA MATRIZ ASSOCIADA À DERIVADA TEMPORAL

```
> e[11]:=alpha[g]/a[g]^2:  
> e[12]:=rho[g]:  
> e[13]:=0:  
> e[14]:=-alpha[g]*rho[g]*beta[g]*T[g]/cp[g]:  
> e[15]:=0:  
> e[21]:=alpha[l]/a[l]^2:  
> e[22]:=-rho[l]:  
> e[23]:=0:  
> e[24]:=0:  
> e[25]:=-alpha[l]*rho[l]*beta[l]*T[l]/cp[l]:  
> e[31]:=0:  
> e[32]:=0:  
> e[33]:=alpha[g]*rho[g]+alpha[l]*rho[l]:  
> e[34]:=0:  
> e[35]:=0:  
> e[41]:=0:  
> e[42]:=0:  
> e[43]:=0:  
> e[44]:=alpha[g]*rho[g]:  
> e[45]:=0:  
> e[51]:=0:  
> e[52]:=0:  
> e[53]:=0:  
> e[54]:=0:
```

```

> e[55]:=alpha[l]*rho[l]:
> E:=Matrix([[e[11],e[12],e[13],e[14],e[15]], [e[21],e[22]
,e[23],e[24],e[25]], [e[31],e[32],e[33],e[34],e[35]], [e[41]
,e[42],e[43],e[44],e[45]], [e[51],e[52],e[53],e[54],e[55]]]
);

```

$$E := \begin{bmatrix} \frac{\alpha_g}{a_g^2} & \rho_g & 0 & -\frac{\alpha_g \rho_g \beta_g T_g}{c p_g} & 0 \\ \frac{\alpha_l}{a_l^2} & -\rho_l & 0 & 0 & -\frac{\alpha_l \rho_l \beta_l T_l}{c p_l} \\ 0 & 0 & \alpha_g \rho_g + \alpha_l \rho_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_g \rho_g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_l \rho_l \end{bmatrix}$$

3 - CONSTRUÇÃO DA MATRIZ ASSOCIADA À DERIVADA ESPACIAL

```

> f[11]:=e[11]*U:
> f[12]:=e[12]*U:
> f[13]:=alpha[g]*rho[g]:
> f[14]:=e[14]*U:
> f[15]:=0:
> f[21]:=e[21]*U:
> f[22]:=e[22]*U:
> f[23]:=alpha[l]*rho[l]:
> f[24]:=0:
> f[25]:=e[25]*U:
> f[31]:=1:
> f[32]:=0:
> f[33]:=e[33]*U:
> f[34]:=0:
> f[35]:=0:
> f[41]:=0:
> f[42]:=0:
> f[43]:=0:
> f[44]:=e[44]*U:
> f[45]:=0:
> f[51]:=0:
> f[52]:=0:

```

```

> f[53]:=0:
> f[54]:=0:
> f[55]:=e[55]*U:
> F:=Matrix([f[11],f[12],f[13],f[14],f[15]],f[21],f[22],f[
23],f[24],f[25]],f[31],f[32],f[33],f[34],f[35]],f[41],f[42]
,f[43],f[44],f[45]],f[51],f[52],f[53],f[54],f[55]]);

```

$$F := \begin{bmatrix} \frac{\alpha_g U}{a_g^2} & \rho_g U & \alpha_g \rho_g & -\frac{\alpha_g \rho_g \beta_g T_g U}{c p_g} & 0 \\ \frac{\alpha_l U}{a_l^2} & -\rho_l U & \alpha_l \rho_l & 0 & -\frac{\alpha_l \rho_l \beta_l T_l U}{c p_l} \\ 1 & 0 & (\alpha_g \rho_g + \alpha_l \rho_l) U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_g \rho_g U & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_l \rho_l U \end{bmatrix}$$

4 - OBTENÇÃO DA MATRIZ DE COEFICIENTES

```

> EI:=MatrixInverse(E):
> G:=EI.F:
> simplify(G);

```

$$\begin{bmatrix} U & 0 & \frac{\rho_l a_l^2 a_g^2 \rho_g (\alpha_g + \alpha_l)}{\rho_l a_l^2 \alpha_g + \alpha_l a_g^2 \rho_g} & 0 & 0 \\ 0 & U & -\frac{\alpha_l \alpha_g (-a_g^2 \rho_g + a_l^2 \rho_l)}{\rho_l a_l^2 \alpha_g + \alpha_l a_g^2 \rho_g} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\alpha_g \rho_g + \alpha_l \rho_l} & 0 & U & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & U & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & U \end{bmatrix}$$

5 - CÁLCULO DOS AUTOVALORES DA MATRIZ DE COEFICIENTES

```

> Aval:=Eigenvalues(G):
> simplify(Aval[1]);

```

$$\left(U \alpha_l^2 \rho_l a_g^2 \rho_g + U \alpha_g \rho_g^2 \alpha_l a_g^2 + U \alpha_l \rho_l^2 a_l^2 \alpha_g + U \alpha_g^2 \rho_g \rho_l a_l^2 + (\rho_l a_l^2 a_g^2 \rho_g (\alpha_g^3 \rho_g \rho_l a_l^2 + \alpha_g^2 \rho_g^2 \alpha_l a_g^2 + \alpha_g \rho_g^2 \alpha_l^2 a_g^2 + \alpha_l \rho_l^2 a_l^2 \alpha_g^2 + \alpha_l^2 \rho_l^2 a_l^2 \alpha_g + \alpha_l^2 \rho_l a_g^2 \rho_g \alpha_g + \alpha_l^3 \rho_l a_g^2 \rho_g + \alpha_g^2 \rho_g \rho_l a_l^2 \alpha_l))^{(1/2)} \right) / (\alpha_g^2 \rho_g \rho_l a_l^2 + \alpha_g \rho_g^2 \alpha_l a_g^2 + \alpha_l \rho_l^2 a_l^2 \alpha_g + \alpha_l^2 \rho_l a_g^2 \rho_g)$$

> **simplify(Aval[2]);**

$$- \left(-U \alpha_l^2 \rho_l a_g^2 \rho_g - U \alpha_g \rho_g^2 \alpha_l a_g^2 - U \alpha_l \rho_l^2 a_l^2 \alpha_g - U \alpha_g^2 \rho_g \rho_l a_l^2 + (\rho_l a_l^2 a_g^2 \rho_g (\alpha_g^3 \rho_g \rho_l a_l^2 + \alpha_g^2 \rho_g^2 \alpha_l a_g^2 + \alpha_g \rho_g^2 \alpha_l^2 a_g^2 + \alpha_l \rho_l^2 a_l^2 \alpha_g^2 + \alpha_l^2 \rho_l^2 a_l^2 \alpha_g + \alpha_l^2 \rho_l a_g^2 \rho_g \alpha_g + \alpha_l^3 \rho_l a_g^2 \rho_g + \alpha_g^2 \rho_g \rho_l a_l^2 \alpha_l))^{(1/2)} \right) / (\alpha_g^2 \rho_g \rho_l a_l^2 + \alpha_g \rho_g^2 \alpha_l a_g^2 + \alpha_l \rho_l^2 a_l^2 \alpha_g + \alpha_l^2 \rho_l a_g^2 \rho_g)$$

> **simplify(Aval[3]);**

$$U$$

> **simplify(Aval[4]);**

$$U$$

> **simplify(Aval[5]);**

$$U$$

Fica claro que os dois primeiros autovalores são os responsáveis pela propagação das ondas de pressão. Seria possível chegar a esta conclusão atribuindo valores numéricos às variáveis declaradas, para em seguida constatar que o primeiro autovalor é sempre positivo, e o segundo, sempre negativo. Estes, portanto, serão representados como $\lambda_l = U_m + a_m$ e $\lambda_l = U_m - a_m$. A tarefa seguinte consiste em determinar as expressões para U_m e a_m .

6 - CÁLCULO DA VELOCIDADE DA MISTURA E DA VELOCIDADE DO SOM NA MISTURA

> **simplify(Aval[1]+Aval[2])/2;**

$$U$$

Verifica-se que, conforme era esperado, $U_m = U$.

> **simplify(Aval[1]-Aval[2])/2;**

$$\begin{aligned} & (\rho_l a_l^2 a_g^2 \rho_g (\alpha_g^3 \rho_g \rho_l a_l^2 + \alpha_g^2 \rho_g^2 \alpha_l a_g^2 + \alpha_g \rho_g^2 \alpha_l^2 a_g^2 + \alpha_l \rho_l^2 a_l^2 \alpha_g^2 + \alpha_l^2 \rho_l^2 a_l^2 \alpha_g \\ & + \alpha_l^2 \rho_l a_g^2 \rho_g \alpha_g + \alpha_l^3 \rho_l a_g^2 \rho_g + \alpha_g^2 \rho_g \rho_l a_l^2 \alpha_l))^{(1/2)} / (\\ & \alpha_g^2 \rho_g \rho_l a_l^2 + \alpha_g \rho_g^2 \alpha_l a_g^2 + \alpha_l \rho_l^2 a_l^2 \alpha_g + \alpha_l^2 \rho_l a_g^2 \rho_g) \end{aligned}$$

> **factor(%);**

$$\frac{\sqrt{\rho_l a_l^2 a_g^2 \rho_g (\alpha_g + \alpha_l) (\alpha_g \rho_g + \alpha_l \rho_l) (\rho_l a_l^2 \alpha_g + \alpha_l a_g^2 \rho_g)}}{(\alpha_g \rho_g + \alpha_l \rho_l) (\rho_l a_l^2 \alpha_g + \alpha_l a_g^2 \rho_g)}$$

Chega-se, enfim, que para o modelo em análise, a velocidade do som na mistura é dada por

$$a_m = \sqrt{\frac{\rho_g a_g^2 \rho_l a_l^2}{\rho_m (\alpha_g \rho_l a_l^2 + \alpha_l \rho_g a_g^2)}}.$$